



Escola de Camins
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

Modelització Numèrica de Flux Compressible en Medi Porós amb Fractures

Treball realitzat per:
Carles Rafels Ybern

Dirigit per:
Ignasi Carol

Màster en:
Enginyeria del Terreny i Enginyeria Sísmica

Barcelona, 23 de setembre de 2016

Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental

TREBALL FINAL DE MÀSTER

Agraïments

La preparació d'aquest treball final de màster "Modelització Numèrica de Flux Compressible en Medi Porós amb Fractures" no hauria estat possible sense la valuosa contribució del Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental de la Universitat Politècnica de Catalunya.

M'agradaria donar les gràcies al professor Igansi Carol per la seva valuosa ajuda per a dur a terme aquest treball. Voldria donar les gràcies, en particular, a Daniel Garolera que m'ha prestat part del seu valuós temps i suport per tirar endavant d'aquest document. El meu agraïment especial també als membres de la meva família i les persones més properes que sempre hi són per ajudar-me.

Índex

1	Introducció	4
1.1	Objectius	5
2	Formulació per a flux de gas ideal en medi porós continu	7
2.1	Introducció medi porós	7
2.2	Formulació monofàsica de fluid compressible en P^2	8
2.3	Formulació monofàsica de fluid compressible en P	9
2.4	Aplicació de l'efecte Klinkenberg	12
2.5	Implementació de la formulació en P per al cas estacionari . .	15
2.6	Implementació de la formulació en P per al cas transitori . . .	16
3	Formulació per a flux de gas ideal en medi porós amb discontinuïtats	18
3.1	Introducció medi porós amb discontinuïtats	18
3.2	Formulació de fluid compressible per al flux longitudinal de la discontinuïtat	20
3.3	Formulació de fluid compressible per al flux transversal de la discontinuïtat	21
3.4	Formulació per elements finits de fluid compressible en medi porós amb discontinuïtats	21
4	Exemples d'aplicació	26
4.1	Exemples de verificació en medi porós	27
4.1.1	Exemple 1, anàlisi estacionari amb fluid incompressible	27

4.1.2	Exemple 2, anàlisi estacionari amb fluid compressible i comparativa de l'efecte Klinkenberg	31
4.1.3	Exemple 3, anàlisi transitori amb fluid incompressible	34
4.1.4	Exemple 4, anàlisi transitori amb fluid compressible	37
4.2	Exemples acadèmics comparant el fluid compressible (<i>DracM-Gas</i>) i l'incompressible (<i>Drac</i>) en medi porós	42
4.2.1	Exemple 5, comparació de fluid compressible i fluid incompressible en règim transitori	46
4.2.2	Exemple 6, anàlisi de buidatge d'un reservori en medi porós	49
4.3	Exemples acadèmics en medi porós amb discontinuïtats	55
4.3.1	Exemple 7, anàlisi d'un dipòsit horitzontal en medi porós amb discontinuïtat	55
4.3.2	Exemple 8, anàlisi de buidatge d'un reservori en medi porós amb discontinuïtat	63
5	Conclusions i possibles línies d'investigació futura	69
5.1	Línia de temps de les tasques realitzades	70

1 Introducció

Una de les principals àrees de recerca actualment en Enginyeria del Petroli és la d'entendre i modelar la recuperació d'hidrocarburs amb la major precisió possible, tenint en compte tant la complexitat física i química, com la dels processos de flux del fluid dins del reservori. Per tal de predir el comportament dels reservoris s'han desenvolupat diverses metodologies on se'ls hi proporcionen la informació sobre els complexos fenòmens que acompanyen als diferents mètodes de recuperació (Dake, 1983; Peaceman, 2000). Les propietats dels fluids dels reservoris de petroli, la predicció del comportament de les fases i tenir mesures reals fiables ajuden a millorar els resultats de recuperació i per tant, les taxes de producció d'hidrocarburs.

Un malentès molt comú sobre la recuperació d'hidrocarburs és pensar que el petroli o el gas es troben en "*grans piscines en coves subterrànies on han de ser bombejats cap a fora d'una manera similar a bombejar un líquid d'un tanc d'aigua*" (Ewing, 1983). Lògicament, això no és realment així i, en general, l'hidrocarbur és troba atrapat en els porcs microscòpics de la roca on per extreure'l aquest fluïrà a través de la roca però, només sota la influència de diferències de pressió significatives. En molts casos, les pressions que es troben en els reservoris són extremadament altes i sovint, aquestes altes pressions ajuden a que el petroli flueixi a través del medi porós i es pugui bombejar sense gaire esforç. Aquest tipus de recuperació s'anomena *primary recovery*, i va ser el primer tipus de reservoris de petroli on es van utilitzar tècniques d'extracció. La simulació d'aquesta recuperació primària aplicat en els models de *Black Oil* ha estat discutit per diversos autors com: Peaceman, 2000; Aziz and Settari, 1979; Bansal et al., 1979; Bowen, 1982; Odeh, 1982, entre d'altres.

Aquest treball final de màster està emmarcat dins del meu propi projecte de tesis doctoral que està enfocat en la modelació del flux d'hidrocarburs i que es centra en els processos d'acoblament Hidro-Mecànics amb models de flux de multifàsics (gas, petroli i aigua, o també anomenat *GOW*) per a medi porós fracturat utilitzant elements junta de doble node amb gruix zero. És per això, que en aquest treball ens centrarem en aquesta línia i es durà a terme un petit apèndix que es basarà en el modelatge del flux de fluid compressible com és el gas per a medi porós fracturat (Ho and Webb, 2006; Lewis and Schrefler, 1999; Morel-Seytoux, 1973). En la figura 1 es pot veure, detallat amb un rectangle negre, la part que es realitzarà en aquest treball final de màster dins del marc del meu projecte de tesis doctoral.

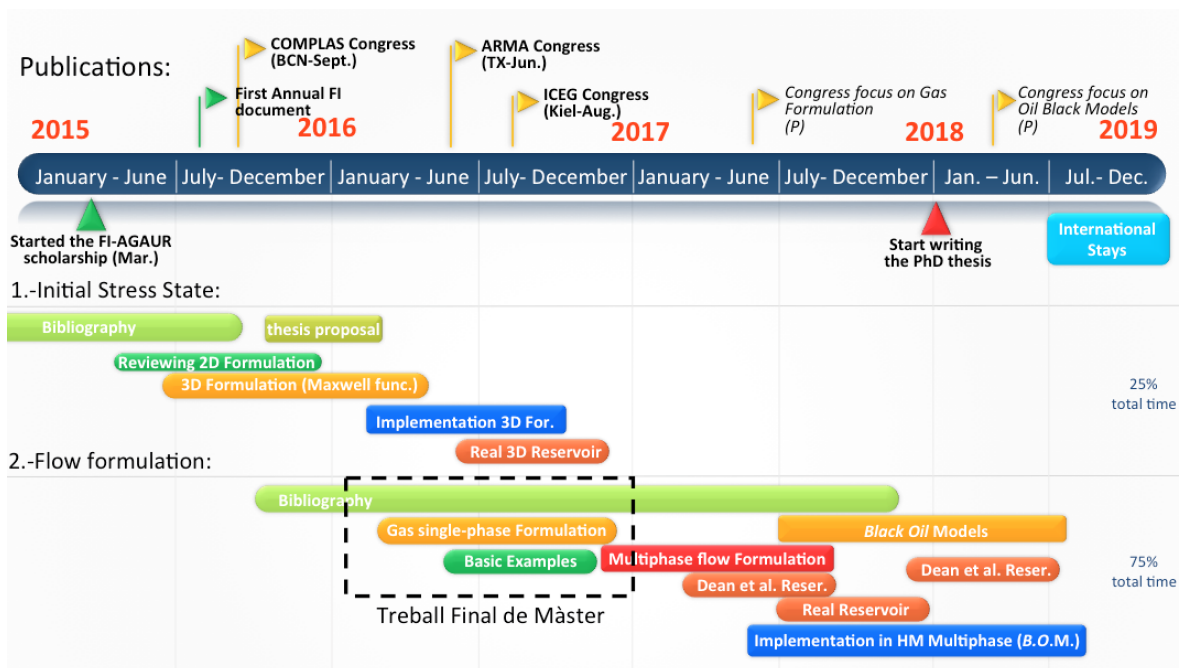


Figura 1: La línia de temps de les diferents tasques a realitzar en la tesis doctoral on assenyat amb el rectangle en negre es mostra l'àrea que es tractarà en aquest treball final de màster.

1.1 Objectius

L'objectiu general d'aquest treball final de màster és la d'avançar cap a la integració i modelació de flux de fluid compressible (gas) en medi porós fracturat dins del marc de la modelació d'hidrocarburs en reservoris que actualment s'està duent a terme en el grup MECMAT. Per a poder establir la modelació de reservoris per mètodes numèrics avançats de manera rigorosa i acurada cal desenvolupar noves eines enfocades de cara a la integració d'un únic *workflow* on es pugui interaccionar amb un model d'acoblament Hidro-Mecànic. Les tasques concretes a realitzar són les següents:

- Recerca bibliogràfica de la modelació de flux monofàsic de fluid compressible a través de medi porós.
- Formulació del fluid compressible per mitjà del mètode d'elements finits tant per a règim estacionari com per a règim transitori.
- Implementació de la formulació de fluid compressible en un entorn de programació.

- Comparativa entre la formulació compressible i incompressible (actualment implementat en el codi *Drac* del grup). Addició dels nous termes del flux de fluid compressible a l'equació de continuïtat del medi.
- Formulació del flux compressible que flueix en una discontinuïtat per mitjà de l'ús dels elements junta de doble node amb gruix zero.
- Aplicació d'exemples acadèmics per al anàlisi en medi porós amb i sense discontinuïtats i, comprovació del correcte funcionament de la formulació implementada.

2 Formulació per a flux de gas ideal en medi porós continu

2.1 Introducció medi porós

La formulació per a fluid compressible com ara el gas en medi porós és rellevant en una sèrie d'aplicacions que inclouen des de *Upstream* en la indústria de petroli (exploració i producció d'Oil&Gas), com la descontaminació ambiental fins al segrest de carboni o també l'anomenat, *gas outbursts* (Otuonye and Sheng, 1994), entre d'altres. Comprendre i formular els mecanismes fonamentals i processos del gas en el medi porós permet que els models puguin avaluar i optimitzar molt notòriament el disseny i el rendiment d'aquests sistemes.

El gas que flueix en un medi porós es diferencia d'un fluid incompressible com ara l'aigua (Lewis and Schrefler, 1987), a causa de la gran capacitat de compressió que té el gas. Aquest efecte dona lloc a que el balanç de massa que flueix per unitat diferencial del medi hagi de ser per unitat de massa i no de volum com típicament es fa per al cas de fluid incompressible. D'aquesta manera, el flux ha de formular-se com a flux màssic i això dona lloc a que l'equació de balanç de massa s'hagi d'expressar de la següent manera (Zienkiewicz, 1970),

$$\rho_g \frac{D(nS_g)}{Dt} + S_g \frac{D(n\rho_g)}{Dt} + \nabla \cdot (nS_g \rho_g j_v^g) = \dot{m}, \quad (1)$$

on ρ_g és la densitat del gas, n és la porositat del medi continu, S_g és el grau de saturació del gas, j_v^g és el flux de Darcy (en unitats volumètriques) i finalment, \dot{m} és factor d'interacció amb altres fases diferents.

En aquest treball final de màster es desenvoluparà la formulació monofàsica per a un fluid compressible com per exemple un fluid com el gas. Podem fer algunes hipòtesis com ara que no hi ha interacció entre altres fases (aigua o petroli) i per tant $\dot{m} = 0$ i, que el grau de saturació del gas és constant a 1 ja que és monofàsic ($S_g = 1$). Aplicant aquestes hipòtesis a l'equació 1 ens queda,

$$\frac{D(n\rho_g)}{Dt} + \nabla \cdot (n\rho_g j_v^g) = 0. \quad (2)$$

Com es veurà en els següents apartats, la formulació corresponent es pot realitzar en dues versions; en funció de la pressió de gas (P_g) o aquesta mateixa variable al quadrat (P_g^2). Aquesta casuística és exclusiva del fluid compressible. En la literatura

Zhu et al. (2007); Wu and Pruess (1998); Clegg (1968); Li et al. (2011); Kidder (1957); Bear (2013); Beygi and Rashidi (2011) trobem que les solucions analítiques d'exemples acadèmics s'han obtingut utilitzant la formulació de la pressió del gas al quadrat (P_g^2). Per aquest motiu, desenvoluparem ambdós formulacions.

2.2 Formulació monofàsica de fluid compressible en P^2

Al tractar un fluid compressible podem definir la densitat del gas (ρ_g) per mitjà de la llei dels gasos ideals,

$$\rho_g = \frac{M_g}{R\theta} P = \beta P, \quad (3)$$

on M_g és la massa molar del gas, R és la constant dels gasos ($R \cong 8,31441 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$), θ és la temperatura, P és la pressió de gas i β és el factor de compressibilitat del medi.

La llei de Darcy en unitats volumètriques la podem expressar com,

$$nS_g j_v^{gs} = \frac{K^{rg} \mathbf{K}}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) = \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g), \quad (4)$$

on $S_g = 1$ perquè només es tracta un sol fluid, K^{rg} és la permeabilitat relativa (els valors oscil·len entre 0 i 1), \mathbf{K} és el tensor de la permeabilitat, μ^g és la viscositat del gas i $\rho_g g$ és el terme gravitacional.

Aplicant les equacions 3 i 4 en l'equació general de balanç de massa (equació 2) i fent el supòsit de que ni el factor de compressibilitat (β) ni la porositat (n) varien amb el temps obtenim,

$$n\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\beta P \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) \right) = 0. \quad (5)$$

Si tenim present la següent relació,

$$P \cdot \nabla P = P \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (P^2) = 2P \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (7)$$

Podem definir el següent,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(P \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P^2}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla P^2). \quad (8)$$

Per altre banda, la derivada temporal també es pot reescriure en termes de pressió al quadrat utilitzant el mateix concepte que s'ha aplicat en l'equació 7. D'aquesta manera obtenim,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2P} \frac{\partial (P^2)}{\partial t}. \quad (9)$$

Substituint l'equació 8 i 9 en l'equació 5, obtenim l'equació del balanç de massa per a un fluid compressible en funció de la pressió al quadrat (P^2):

$$\frac{n}{P} \frac{\partial P^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{K}{\mu^g} (-\nabla P^2 + \rho_g g) \right) = 0. \quad (10)$$

Reagrupant termes i definint-los com a $\hat{P} = P^2$, $\hat{C} = n/P$ i finalment, $\hat{K} = K/\mu^g$ s'obté,

$$\hat{C} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\hat{K} (-\nabla \hat{P} + \rho_g g) \right) = 0. \quad (11)$$

Aquest reagrupament de terme és també utilitzats ens els exemples acadèmics on es formula la solució analítica fent certs supòsits com ara; definir \hat{C} per un valor aproximat substituint la variable de la pressió de gas que està dividint per una pressió mitjana (Li et al., 2011; Zhu et al., 2007; Wu and Pruess, 1998; Beygi and Rashidi, 2011). Aquesta formulació en P^2 té una restricció rellevant, ja que, només es pot utilitzar en casos on no hi hagi pressions negatives. L'equació de balanç de massa discretitzada en l'espai i en el temps es pot veure en l'equació 20.

2.3 Formulació monofàsica de fluid compressible en P

De la mateixa manera que en la formulació per a P^2 , al tractar-se d'un fluid compressible podem aplicar la llei de gasos ideals (equació 3) i la llei de Darcy (equació 4). Substituint les equacions 3 i 4 en l'equació de balanç de massa (equació 2) obtenim,

$$\frac{\partial (n\beta P)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_g \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) \right) = 0. \quad (12)$$

Suposant que el factor de compressibilitat (β) i la porositat (n) no varien amb el

temps ens queda,

$$n\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_g \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) \right) = 0. \quad (13)$$

Aquesta darrera equació (equació 13) és molt semblant a l'equació 5 però, en aquest cas, en el terme de la divergència no hem substituït el terme de la densitat. Si reagrupem termes tal com s'ha fet en la formulació anterior i definim que $\check{C} = n\beta$ i $\check{K} = \rho_g K / \mu^g$ ens queda el següent,

$$\check{C} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (\check{K} (-\nabla P + \rho_g g)) = 0. \quad (14)$$

Fent la comparativa de l'equació 11 amb l'equació 14 podem veure que l'esquema del sistema a resoldre és el mateix. Això és possible gràcies als canvis de variables que es fa en l'equació 11. Per aquest motiu i en aquest document només discretitzarem una de les dues formulacions, ja que, l'altre es pot obtenir aplicant exactament la mateixa metodologia que s'explica a continuació. Així doncs, per a la formulació d'elements finits partirem del balanç de massa següent,

$$n\beta \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_g \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) \right) = 0. \quad (15)$$

Utilitzant els mètode de residus ponderats obtenim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^T n\beta \frac{\partial P}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w^T \nabla^T \cdot \left(\rho_g \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) \right) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma} \bar{w}^T \left(\rho_g \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) - q_g \right) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Aplicant el teorema de Green i escollint adequadament que la funció de forma barra sigui $\bar{w} = -w$, l'equació de balanç de massa que ens queda és:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^T n\beta \frac{\partial P}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla w^T \rho_g \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) d\Omega + \int_{\Gamma} w^T \rho_g \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) d\Gamma + \\ - \int_{\Gamma} w^T \rho_g \frac{K}{\mu^g} (-\nabla P + \rho_g g) + \int_{\Gamma} w^T q_g d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

En molts casos, el terme gravitacional és relativament petit, i es pot ignorar en els càlculs posteriors, a causa de que en la llei de Darcy la contribució de la densitat del

gas en el terme gravitacional és relativament petita en comparació amb el gradient de la pressió de gas. Llavors, podem tornar a escriure i reorganitzar els termes de l'equació anterior com,

$$\int_{\Omega} w^T n \beta \frac{\partial(P)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w^T \rho_g \frac{K}{\mu^g} \nabla P d\Omega + \int_{\Gamma} w^T q_g d\Gamma = 0. \quad (18)$$

Finalment, aplicant *General Galerkin* ($w = N_p$) i discretitzant la pressió de gas com $P = N_p P^g$, l'expressió del balanç de massa és,

$$\left(\int_{\Omega} N_p^T n \beta N_p d\Omega \right) \dot{P}^g + \left(\int_{\Omega} \nabla N_p^T \rho_g \frac{K}{\mu^g} \nabla N_p d\Omega \right) P^g = - \int_{\Gamma} N_p^T q_g d\Gamma.$$

$$\boxed{S_{gg} \dot{P}^g + H_{gg} P^g = f_g.} \quad (19)$$

La principal diferència entre la formulació de flux de fluid incompressible amb la darrera formulació recau en el terme de capacitat (S_{gg}) on en el cas incompressible i segons Lewis and Schrefler (1999) dins de la matriu S_{gg} tenim n/k_w (on k_w és *fluid bulk modulus*) i en el nostre cas, la matriu S_{gg} conté $n\beta$. També per altre banda, el terme de la densitat del gas que es troba dins de la matriu de permeabilitat (H_{gg}) on en el cas incompressible no està present. És important subratllar que al aparèixer aquest terme de la densitat del gas dins de la matriu H_{gg} i ser aquesta funció de la pressió de gas (equació 3), el sistema d'equacions (equació 19) és no lineal. Per tant, s'ha d'implementar un procés iteratiu per a resoldre aquest sistema matemàtic.

Per altre banda, aplicant aquesta mateixa metodologia a la formulació de P^2 (equació 11) es pot arribar a:

$$\left(\int_{\Omega} N_p^T \hat{C} N_p d\Omega \right) \dot{\hat{P}}^g + \left(\int_{\Omega} \nabla N_p^T \hat{K} \nabla N_p d\Omega \right) \hat{P}^g = - \int_{\Gamma} N_p^T q_g d\Gamma.$$

$$\boxed{S_{gg} \dot{\hat{P}}^g + H_{gg} \hat{P}^g = f_g.} \quad (20)$$

On si desfem el canvi de variables $\hat{P} = P^2$, $\hat{C} = n/P$ i $\hat{K} = K/\mu^g$ es pot veure que els termes de capacitat (S_{gg}) i de permeabilitat (H_{gg}) són certament diferents als de l'equació 19. És important recalcar que la solució d'aquest nou sistema conté la pressió al quadrat i com ja s'ha comentat en l'apartat 2.2, això dóna lloc a algunes limitacions com ara que les pressions de gas no poden tenir valors negatius. Per aquest motiu en aquest treball la implementació de la formulació per a flux monofàsic de fluid

compressible es basarà en la formulació de P i no en la de P^2 . Tot i així, com ja s'ha comentat anteriorment, en la literatura, les solucions analítiques de casos acadèmics s'han determinat amb la formulació de P^2 basant-se en certes simplificacions. En l'apartat d'exemples (apartat 4) es pot veure la comparativa de la solució analítica presentada en diversos papers amb la solució numèrica que obtenim amb la formulació implementada en aquest treball.

2.4 Aplicació de l'efecte Klinkenberg

Com ja s'ha comentat en apartats anteriors, la diferència entre fluid compressible i incompressible recau sobre el fet en que el fluid es pot comprimir en funció de la pressió del medi. Aquest fet queda reflectit en el terme de la densitat del gas (ρ_g) que és directament proporcional a la pressió del gas (equació 3). No obstant, el terme de la divergència de l'equació del balanç de massa (equació 2) es pot veure com el flux de Darcy (j_v^g) és en termes de volum i aquest és multiplicat per la densitat del gas donant així, el flux en termes de massa. Per tant podríem definir el flux màssic com,

$$j_m^g = n\rho_g j_v^g. \quad (21)$$

Si examinem amb més deteniment la llei de Darcy (equació 4) podem veure com a gradients iguals de pressió, el flux que obtenim és el mateix. Aquest aspecte sobta amb el concepte d'estar modelant fluids compressibles. Perquè, per exemple, imaginem que tenim un domini unidimensional de longitud unitat on la pressió a esquerra i dreta és de 10 i 2 KPa, i un altre domini similar que tingui 30 i 22 KPa respectivament. El gradient de pressions d'ambdós casos serà igual a 8 KPa i per tant, el flux volumètric (j_v^g) també, ja que, és $K/\mu_g \cdot \nabla P$. Que la permeabilitat sigui constant en termes de volum, és a dir, que pel mateix gradient de P sempre passi el mateix volum per unitat de temps independent del valor absolut de P no deixa de ser una hipòtesis restrictiva i no del tot realista per un fluid que es comprimeix per l'efecte d'augmentar la pressió del medi.

Una extensió de l'anteriorment plantejat es coneix com a *Klinkenberg effect* i d'acord amb Klinkenberg (1941) i Zhu et al. (2007) es pot redefinir una permeabilitat efectiva del gas (K_{eff}) que és funció de la pressió i es pot expressar com,

$$K_{eff} = K_{\infty} \left(1 + \frac{b}{P} \right), \quad (22)$$

on K_{∞} (o K_{inf}) és la permeabilitat absoluta del gas que es defineix per a pressions molt altes on la condició de l'efecte Klinkenberg és negligible (m^2), i b és el factor de Klinkenberg (Pa) que depèn de l'estructura de poros del medi i de la temperatura del gas.

En general, el factor de Klinkenberg és més gran per a baixes permeabilitats, com per exemple, medi porós de gra fi (Wu and Pruess, 1998). Això vol dir que el *Klinkenberg effect* té un impacte més significatiu, en el comportament del flux de gas, en medis de baixa permeabilitat. Jones and Owens (1980) van trobar una relació de decreixement del factor de Klinkenberg (b) en augmentar la permeabilitat i es defineix per la següent relació,

$$b = \alpha_k K_{\infty}^{-0.36}, \quad (23)$$

on α_k és el coeficient efectiu de Klinkenberg ($Pa m^{0.72}$) que es defineix per ser un valor pròxim a 0.251 basat en dades experimentals.

Segons Collins and Crawford (1953) pot ser convenient definir una nova variable de pressió anomenada *pressure function*:

$$P_b = P + b. \quad (24)$$

Si analitzem en més detall el flux màssic (equació 21) aplicant-li la llei de Darcy (equació 4) i prenent com a negligible el terme gravitacional ($\rho_g g = 0$) podem obtenir el següent,

$$j_m^g = n \rho_g j_v^g = -\rho_g \left(\frac{K}{\mu_g} \nabla P \right). \quad (25)$$

Si ara apliquem el *Klinkenberg effect* (equació 22) a l'equació anterior ens queda,

$$j_m^g = -\rho_g \left(\frac{K_{\infty}}{\mu_g} \left(1 + \frac{b}{P} \right) \nabla P \right) = -\rho_g \frac{K_{\infty}}{\mu_g} \nabla P - \rho_g \frac{K_{\infty} b}{P \mu_g} \nabla P. \quad (26)$$

Es pot veure com ara el flux és la suma de dos termes: el primer, un flux amb permeabilitat volumètrica constant (terme vàlid per a $b = 0$) i el segon, un flux màssic addicional que és inversament proporcional a P . Però, aplicant la llei dels gasos ideals (equació 3) podem substituir-la i eliminar el segon terme de P on la P apareix dividint.

Per tant, el flux màssic es pot expressar com,

$$j_m^g = - \left(\beta P \frac{K_\infty}{\mu_g} \nabla P + \beta \frac{K_\infty b}{\mu_g} \nabla P \right) = -\beta \frac{K_\infty}{\mu_g} (P + b) \nabla P. \quad (27)$$

Aplicant aquest flux màssic (equació 27) a l'equació de balanç de massa (equació 2) i substituint la pressió de gas per la variable de *pressure function* (equació 24) descrita per Collins and Crawford (1953) obtenim la següent expressió,

$$n\beta \frac{\partial (P_b - b)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\beta \frac{K_\infty}{\mu_g} (P_b - b + b) (-\nabla (P_b - b)) \right) = 0. \quad (28)$$

Reordenant els termes i suposant que el factor de Klinkenberg (b) no depèn ni de l'espai ni del temps,

$$n \frac{\partial (P_b)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{K_\infty}{\mu_g} P_b (-\nabla P_b) \right) = 0. \quad (29)$$

Tenint en compte les relacions que s'han definit per a la formulació de P^2 (equacions 7-9) ens queda,

$$\frac{n}{P_b} \frac{\partial (P_b^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{K_\infty}{\mu_g} \nabla P_b^2 \right) = 0. \quad (30)$$

Si la permeabilitat absoluta del gas (K_∞) i la viscositat del gas (μ^g) es prenen com a constants en l'espai, aquests paràmetres es poden treure de la divergència i posar en el terme capacitat (Zhu et al., 2007). En el nostre cas no ho tenim present perquè així queda una formulació més general i perquè per a línies futures sempre es pot donar aquestes dues variables en funció de l'espai. Si a l'equació 30 li renombrem certes variables per; $\hat{P} = P_b^2$, $\hat{C} = n/P_b$ i $\hat{K} = K_\infty/\mu^g$, obtenim exactament el mateix sistema matemàtic que en l'equació 11. Aquest és un dels motius pel qual les solucions analítiques s'han obtingut amb la formulació de P^2 , ja que és una manera simple de poder tenir en compte l'efecte de Klinkenberg sense variar la formulació de fluid compressible sencera.

Si apliquem l'efecte de Klinkenberg a la formulació en P (equació 13) obtenim que en el procés iteratiu per a determinar el valor de la densitat també s'ha d'incorporar un nou terme que es on es tindrà present l'efecte de Klinkenberg. L'equació diferencial un cop aplicada la discretització ens quedaria de la següent manera,

$$\left(\int_{\Omega} N_p^T n \beta N_p d\Omega \right) \dot{P}^g + \left(\int_{\Omega} \nabla N_p^T \rho_g \frac{K_{eff}}{\mu^g} \nabla N_p d\Omega \right) P^g = - \int_{\Gamma} N_p^T q_g d\Gamma.$$

$$\boxed{S_{gg}\dot{P}^g + H_{gg}P^g = f_g.} \quad (31)$$

on en el procés iteratiu s'ha de calcular:

$$\rho_g = \frac{M_g}{R\theta} P^g = \beta P^g.$$

$$K_{eff} = K_\infty \left(1 + \frac{b}{P^g} \right).$$

Aquesta és l'equació diferencial del fluid compressible que ha semblat més òptima i la que s'ha implementat en aquest treball final de màster. La decisió d'implementar aquests sistema matemàtic rau en que si el factor de Klinkenberg és igual a zero ($b = 0$), l'equació de balanç de massa que es resol és el de l'equació 19. Aquest aspecte és molt interessant, ja que en implementar aquesta formulació, el codi que obtens pot servir per a les dues formulacions (equació 19 i 31) a la vegada.

2.5 Implementació de la formulació en P per al cas estacionari

En el cas de l'estat estacionari, l'equació 32 descriu el comportament del flux en el moment on el sistema ja no acumula més fluid i per tant el cabal que entra en el sistema és igual al que surt del sistema, és a dir, per a $t \rightarrow \infty$. Per tant, el cas estacionari és un cas particular de l'equació 31 on el terme de la derivada temporal (terme de capacitat) s'elimina i el sistema a resoldre ens queda és:

$$H_{gg}P^g = f_g. \quad (32)$$

En un mateix problema es poden definir diferents *steps* de càrrega amb les seves pròpies condicions de contorn corresponents. Suposem que estem analitzant la fase de càrrega $n + 1$, i que la distribució de pressions al final de l'anterior *steps* és coneguda, és a dir, P_n^g . La pressió de fluid en la fase de càrrega $n + 1$ es pot expressar com:

$$P_{n+1}^g = P_n^g + \Delta P_{n+1}^g. \quad (33)$$

Substituint l'equació 33 en l'equació 32, podem reordenar els termes i que l'incògnita a resoldre sigui l'increment de pressió d'una fase de càrrega a l'altre (ΔP_{n+1}^g). Per tant, l'expressió del nostre sistema a resoldre quedaria de la següent manera:

$$H_{gg}|_{n+1} \triangle P_{n+1}^g = f_g|_{n+1} - H_{gg}|_{n+1} P_n^g. \quad (34)$$

És important assenyalar que en aquest cas, la matriu de permeabilitat (H_{gg}) és funció de la densitat i alhora, aquesta és directament proporcional a la P^g . Per tant, és necessari a l'hora d'implentar la formulació en règim estacionari incloure un procediment d'iteració directe on es verifiqui que entre iteració i itereació no hi ha molta diferència mitjançant una tolerància preestrablerta, i així, obtenir la distribucions de pressions en el sistema.

2.6 Implementació de la formulació en P per al cas transitori

Partint del sistema d'equacions de primer ordre (equació 31) podem resoldre dit sistema amb un esquema recurrent d'integració mitjançant la discretització temporal per diferències finites.

$$S_{gg} \frac{dP^g}{dt} + H_{gg} P^g = f_g. \quad (35)$$

Utilitzant la regla trapezoïdal generalitzada es pot discretitzar l'equació 35 si definim un temps inicial (t_0) i un temps final (t_f). Amb aquests paràmetres s'obté una sèrie d'increments en el temps que es pot definir de la següent manera:

$$\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n.$$

Un cop fixat l'interval de temps Δt_{n+1} , els valors de $P_{n+\theta}^g$ s'aproximen de forma lineal en el temps, el que dona les següents expressions:

$$P_{n+\theta}^g = P_n^g + \theta \Delta P_{n+1}^g, \quad (36)$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{n+\theta} = \frac{\Delta P_{n+1}^g}{\Delta t_{n+1}}, \quad (37)$$

on $\Delta P_{n+1}^g = P_{n+1}^g - P_n^g$. Si la discretització temporal l'apliquem en l'instant de temps $n + \theta$, l'equació 35 ens queda:

$$S_{gg}|_{n+\theta} \left[\frac{\Delta P_{n+1}^g}{\Delta t_{n+1}} \right] + H_{gg}|_{n+\theta} [P_n^g + \theta \Delta P_{n+1}^g] = f_g|_{n+\theta}. \quad (38)$$

Reordenant els termes podem aïllar com a principal incògnita l'increment de la pressió de fluid (ΔP_{n+1}^g):

$$\left[S_{gg}|_{n+\theta} + \theta \Delta t_{n+1} H_{gg}|_{n+\theta} \right] \Delta P_{n+1}^g = \hat{f}_g \Big|_{n+\theta}, \quad (39)$$

on

$$\hat{f}_g \Big|_{n+\theta} = \Delta t_{n+1} \left(f_g|_{n+\theta} - H_{gg}|_{n+\theta} P_n^g \right). \quad (40)$$

El valor de θ pot variar entre 0 i 1 en funció de l'esquema d'integració de temps que es consideri, com es mostra a la taula següent:

θ	esquema d'integració temporal
0	diferències finites cap endavant
1/2	diferències finites centrades
1	diferències finites cap enrere
2/3	Galerkin

Taula 1: Definició dels valors d' θ en funció de l'esquema d'integració temporal.

En els exemples d'aquest treball s'ha aplicat sempre l'esquema d'integració del temps per *diferències finites cap enrere*, és a dir, $\theta = 1$. S'ha escollit aquest esquema d'integració degut a que és sempre estable numèricament i convergent, tot i que, en general pot ser més costos numèricament que altres mètodes.

3 Formulació per a flux de gas ideal en medi porós amb discontinuïtats

3.1 Introducció medi porós amb discontinuïtats

És ben sabut que el comportament hidràulic d'una formació geològica es troba afectat en gran mesura per l'existència de discontinuïtats, i per tant aquestes s'haurien d'incloure en la modelació. Les discontinuïtats cada cop tenen major rellevància i preocupació en molts processos com ara; en els rendiments dels aqüífers o la retenció d'aigua als embassaments com també, en el transport de contaminants, o en els processos d'explotació i d'altres aplicacions geotècniques. D'altra banda, en molts d'aquests problemes el comportament mecànic i hidràulic apareixen sovint combinats i s'influeixen recíprocament, donant lloc a l'anomenat acoblament hidromecànic. La creació i l'obertura progressiva de discontinuïtats, com fissures o juntes, significa també l'obertura d'una via de flux preferencial, el que representa un factor d'acoblament addicional per a la seguretat i el rendiment de molts d'aquests processos.

Existeixen diversos models en la literatura amb la finalitat d'estudiar el flux de fluid incompressible en medi porós fracturat, tot i això, els podem classificar en tres grans grups. El primer grup es basa en reemplaçar el domini fracturat per un medi continu equivalent amb una mitjana de les propietats tant del medi porós com de les fractures. Aquest grup s'aplica sobretot en dominis d'estudi que contenen moltes discontinuïtats (Long et al., 1982; Pruess et al., 1986; Jackson et al., 2000). Per un altre costat, el segon gran grup es basa en diferenciar la matriu de medi porós i la xarxa de discontinuïtats del model com sistemes independents solapats sobre el mateix domini. En aquests models s'ha de definir de manera individual per a cada sistema la conductivitat/permeabilitat hidràulica i el coeficient d'emmagatzematge, paràmetres que estan lligats amb la pressió del medi (Warren and Root, 1963). Aquest segon grup s'anomenen *models de doble porositat*. El tercer grup, que inclou aquest treball, considera explícitament les fractures com a individuals, la qual cosa permet el càlcul explícit dels gradients de càrrega hidràulica i fluxos d'intercanvi entre les discontinuïtats i els voltants, és a dir, el medi continu porós. Aquest últim grup s'anomena *model de fractures discretes* i existeix una àmplia literatura que el descriu; Andersson and Dverstorp (1987); Berkowitz et al. (1988); Sudicky and McLaren (1992).

En general, tant el flux en medi porós estàndard com en medi porós fracturat, en

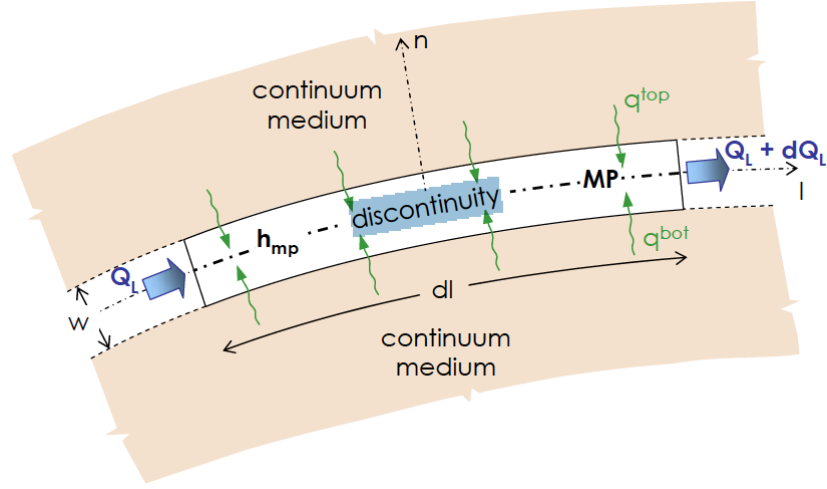


Figura 2: Flux a través d'un element junta on MP és el pla mig, w és l'apertura de la junta, q^{top} i q^{bot} són els fluxos transversals a la junta (positiu per a flux d'injecció i negatiu d'extracció) i Q_L i $Q_L + dQ_L$ són els cabals longitudinal de la junta. Font: Segura and Carol (2007).

qualsevol de les tres modalitats esmentades, pot ser abordats de manera eficaç per mitjà del mètode d'elements finits (MEF). En aquest sentit, l'anàlisi mecànic amb discontinuïtats utilitzant els elements junta de doble node amb gruix zero (*zero-thickness double-nodded interface elements*) està molt verificat amb una extensa literatura al darrera; Carol et al. (2001, 1997, 1985); Gens et al. (1989, 1990); Alonso et al. (1996); Goodman et al. (1968); Segura and Carol (2008a,b). Per altre banda, l'aplicació d'aquest model en problemes amb comportament únicament hidràulic per a descriure l'anàlisi del flux incompressible també s'ha dut a terme en diversos papers (Segura and Carol, 2004; Ng and Small, 1997; Bear et al., 2012; Segura and Carol, 2007; Berkowitz et al., 1988). Així doncs, una de les contribucions d'aquest treball es basa en aplicar aquests elements junta de doble node de gruix zero (*zero-thickness double-nodded interface elements*) però, per a un anàlisi de flux monofàsic d'un fluid compressible com ara el gas. El flux del fluid en una discontinuïtat es pot desplaçar en la direcció longitudinal pel pla mig de la discontinuïtat (MP) o en direcció normals a la junta i, és per això que es necessari definir uns eixos locals (l, n) dins de la junta (Figura 2). Per tant, els fluxos del fluid longitudinals i transversals s'han de descriure de manera independent .

3.2 Formulació de fluid compressible per al flux longitudinal de la discontinuïtat

El comportament hidràulic longitudinal d'una discontinuïtat es pot estudiar de manera unidimensional al llarg de la seu pla mig. Prenent un element diferencial de la discontinuïtat (Figura 2) i aplicant-li l'equació de balanç de la massa per a fluid compressible en la direcció longitudinal (equació 2), i tenint en compte la definició del flux màssic (equació 21), obtenim l'equació unidimensional següent,

$$\frac{\partial (w\rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial J_{Lm}}{\partial l} + q^{top} + q^{bot} = 0, \quad (41)$$

on J_{Lm} és el flux màssic longitudinal de la junta, w és l'obertura de la discontinuïtat, ρ_g densitat del gas i q^{top} i q^{bot} són els fluxos transversals de la junta o fluxos d'intercanvi entre discontinuïtat i medi continu porós. En aquest cas al estar tractant un fluid compressible com el gas, el flux que passa per unitat de discontinuïtat ha de ser un flux màssic (equació 42) i per tant, no pot ser el flux volumètric típic que s'utilitza en fluid incompressible (Segura and Carol, 2004). Per altre banda, l'espai per on pot fluir el gas en aquest cas particular de la junta és la pròpia obertura de la discontinuïtat (w) igual que ho és la porositat (n) en el cas de medi continu.

La llei de Darcy en el cas particular 1D i prenent com a negligible el terme gravitacional ($\rho_g g = 0$) es pot expressa de la següent manera:

$$J_{Lm} = \rho_g w j_{lv} = -\rho_g \frac{K_l}{\mu_g} \frac{\partial P_{mp}}{\partial l}, \quad (42)$$

on j_{lv} és el flux longitudinal volumètric del fluid, K_l és la permeabilitat hidràulica longitudinal de la discontinuïtat (m^2), μ_g és la viscositat del gas ($Pa \cdot s$) i P_{mp} és la pressió en el pla mitjà de la discontinuïtat (Segura and Carol, 2007).

Substituïnt l'equació 42 en l'equació 41 es pot obtenir l'equació diferencial que governa el flux longitudinal al llarg del pla mig de la discontinuïtat com,

$$w \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(-\rho_g \frac{K_l}{\mu_g} \frac{\partial P_{mp}}{\partial l} \right) + q^{top} + q^{bot} = 0. \quad (43)$$

La discretització per elements finits de l'equació 43 està desenvolupada en l'apartat 3.4 conjuntament amb l'equació que governa el flux transversal que s'explica en l'apartat següent.

3.3 Formulació de fluid compressible per al flux transversal de la discontinuïtat

A més de la permeabilitat longitudinal, l'existència d'una discontinuïtat també pot representar una obstacle o resistència al flux en la direcció transversal, per exemple a causa de l'existència de material de reblliment o d'una falla impermeable, o a causa de la transició del fluid des d'un sistema de pors en un canal obert i de nou en un sistema de pors. Aquesta resistència complica el flux en la direcció transversal i dóna com a resultat una caiguda de potencial a través de la discontinuïtat (Segura and Carol, 2008a,b). Caigudes de potencial similars s'observen en altres processos de difusió similar, com ara en problemes de flux de calor (Gibbins, 2006) o en problemes electroquímics (Poulbot et al., 1995).

El model de flux de fluid transversal que s'utilitza en aquesta treball considera una caiguda de potencial total a través de la discontinuïtat. Una manera de poder vincular aquesta caiguda de potencial amb el flux del fluid és reformulant lleugerament la llei de Darcy com,

$$J_T = \frac{K_t}{\mu_g} P_t, \quad (44)$$

on J_T és el flux transversal, K_t és el coeficient de permeabilitat hidràulica transversal, μ_g és la viscositat del gas i P_t és la caiguda de pressió de fluid al travessar la discontinuïtat, que és la diferència de P entre els dos costats de la discontinuïtat anomenats *top* i *bot* (figura 2). Dita diferència es pot definir de la següent manera,

$$P_t = P^{bot} - P^{top}. \quad (45)$$

La discretització del flux transversal pel mètode d'elements finits (MEF) es realitza en l'apartat següent.

3.4 Formulació per elements finits de fluid compressible en medi porós amb discontinuïtats

En aquest apartat desenvoluparem la formulació de la junta per elements finits del flux longitudinal i transversal mitjançant el mètode de Galerkin com també s'ha descrit en l'apartat 2.3 per al medi continu. El comportament longitudinal, expressat en l'apartat 3.2, és definit per a un element unidimensional (1D) que es defineix pel pla mitjà de la

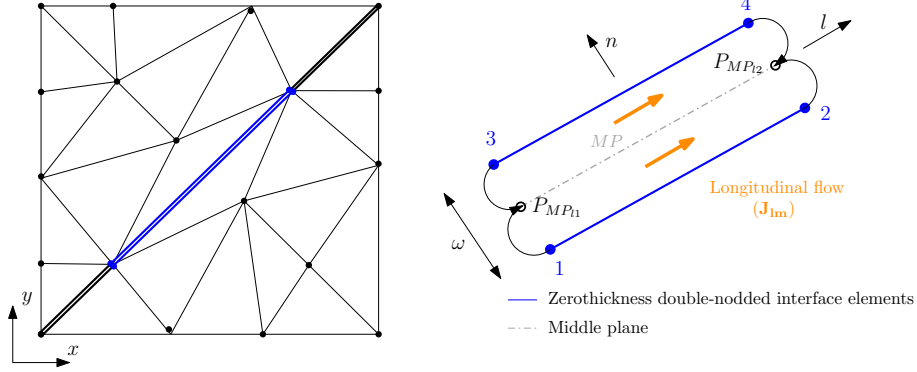


Figura 3: A la dreta es presenta una simple malla d'elements finits on en blau es representa l'element junta de doble node amb gruix zero. A l'esquerra es representa aquest element junta on es pot veure els nodes (1, 2, 3 i 4) i els punts corresponents del pla mitjà (P_{MP11} i P_{MP12}). Els valors en aquests pla mitjà corresponen a l'interpolació dels nodes 1 i 3 per a P_{MP11} i, dels nodes 2 i 4 per a P_{MP12} .

discontinuitat (Figura 3). Per altre banda, en el comportament transversal es necessita modelar la caiguda de potencial (P_t) a través de la discontinuitat i per això, s'utilitzarà els elements junta de doble node amb gruix zero (Segura and Carol, 2007).

- Formulació FEM per al flux longitudinal:

El flux longitudinal es formula en el pla mitjà de la discontinuitat. És important remarcar que aquest pla és un pla imaginari on els valors nodals d'aquest pla s'obtenen per fer la mitja dels valors nodals de l'element de la junta (equació 46). En la figura 3 es pot veure també, com P_{MP11} és funció de les pressions dels nodes 1 i 3, i P_{MP12} és funció de P_2 i P_4 . Amb això, es pot obtenir la matriu de transformació longitudinal (T_{long}) dels nodes de la discontinuitat als nodes del pla mitjà ($P_{MP_{long}}$).

$$\begin{aligned}
 P_{MP_{long}} &= \begin{bmatrix} P_{MP11} \\ P_{MP12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 (P_1 + P_3) \\ 1/2 (P_2 + P_4) \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = T_{long} \hat{P}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Per a obtenir la formulació del flux longitudinal unidimensional podem aplicar la metodologia explicada en l'apartat 2.3. Basant-nos en l'equació 43 i aplicant-li els residus poderats, obtenim:

$$\begin{aligned} \int_l \omega^T w \beta \frac{\partial P_j}{\partial t} dl + \int_l \omega^T \frac{\partial}{\partial l} \left(\rho_g \frac{K_l}{\mu^g} \left(-\frac{\partial}{\partial l} P_j \right) \right) dl + \\ + \int_l \omega^T q^{bot} dl + \int_l \omega^T q^{top} dl = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Aplicant el teorema de Green ens queda:

$$\begin{aligned} \int_l \omega^T w \beta \frac{\partial P_j}{\partial t} dl - \int_l \nabla \omega^T \rho_g \frac{K_l}{\mu^g} \left(-\frac{\partial}{\partial l} P_j \right) dl + \\ + \int_l \omega^T q^{bot} dl + \int_l \omega^T q^{top} dl + \int_l w^T q_g dl = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Reordenant termes i aplicant *General Galerkin* ($\omega = N_j$),

$$\begin{aligned} \int_l N_j^T w \beta \frac{\partial P_j}{\partial t} dl + \int_l \nabla N_j^T \rho_g \frac{K_l}{\mu^g} \frac{\partial}{\partial l} P_j dl = \\ - \int_l N_j^T q^{bot} dl - \int_l N_j^T q^{top} dl - \int_l N_j^T q_g dl = f_j. \end{aligned} \quad (49)$$

Discretitzant la pressió de gas de la discontinuïtat com $P_j = N_j \bar{P}_j$, obtenim:

$$\left(\int_l N_j^T w \beta N_j dl \right) \dot{\bar{P}}_j + \left(\int_l \nabla N_j^T \rho_g \frac{K_l}{\mu^g} \nabla N_j dl \right) \bar{P}_j = f_j. \quad (50)$$

Matricialment el sistema es pot expressar com,

$$S_{jj} \dot{\bar{P}}_j + H_{jj} \bar{P}_j = f_j. \quad (51)$$

Ara bé tant la matriu de capacitat (S_{jj}) com la matriu de permeabilitat (H_{jj}) de la junta estan definides en termes dels valors en els punts del pla mitjà (MP). Cal recordar que aquest pla és un pla imaginari com ja s'ha comentat al principi d'aquest apartat. Aplicant l'equació 46 al sistema matricial (equació 51), més el teorema de treballs virtuals, podem obtenir la formulació del flux longitudinal en funció dels nodes de la discontinuïtat per mitjà de la matriu de transformació (T_{long}). Així doncs ens queda,

$$\boxed{(T_{long}^T S_{jj} T_{long}) \dot{\hat{P}} + (T_{long}^T H_{jj} T_{long}) \hat{P} = T_{long}^T \hat{f}.} \quad (52)$$

on

$$T_{long}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

- Formulació FEM per al flux transversal:

El flux transversal es formula per mitjà de l'ús dels elements junta de doble node amb gruix zero. En alguns casos, la influència d'una permeabilitat transversal no és considerada i per tant, aquests elements junta de doble node passen a ser com els elements junta d'un sol node. En aquest cas, quan arriba el moment de resoldre el sistema, els dos nodes de la junta han de tenir el mateix potencial (Woodbury and Zhang, 2001). En el nostre cas, aquest requisit no és necessari i, en general, els dos nodes tindran diferents valors de potencial. En la figura 4 es pot veure el flux transversal (J_{tm}) tal com es defineix en l'equació 44 on la pressió de fluid transversal (P_t) és la diferència entre cada costat de la discontinuïtat (P^{top} i P^{bot}). En aquest cas es pot definir el salt transversal de la pressió en els punts en el pla mig ($P_{MP_{trans}}$) per la següent expressió,

$$\begin{aligned} P_{MP_{trans}} &= \begin{bmatrix} P_{MP_{t1}} \\ P_{MP_{t2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 - P_3 \\ P_2 - P_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = T_{trans} \hat{P}, \end{aligned} \quad (54)$$

on es pot veure com $P_{MP_{t1}}$ és funció de les pressions dels nodes 1 i 3, i $P_{MP_{t2}}$ és funció de P_2 i P_4 . Amb això, es pot obtenir la matriu de transformació transversal (T_{trans}) dels nodes de la discontinuïtat als punts del pla mitjà ($P_{MP_{trans}}$). Per a obtenir la formulació del flux transversal s'ha de tenir present la reformulació de la llei de Darcy (equacions 44-45). Aquesta formulació acabarà sent un terme addicional al terme de permeabilitat (H_{jj}) del sistema d'equacions a resoldre (equació 50). Aplicant els residus ponderats a l'equació 44 obtenim,

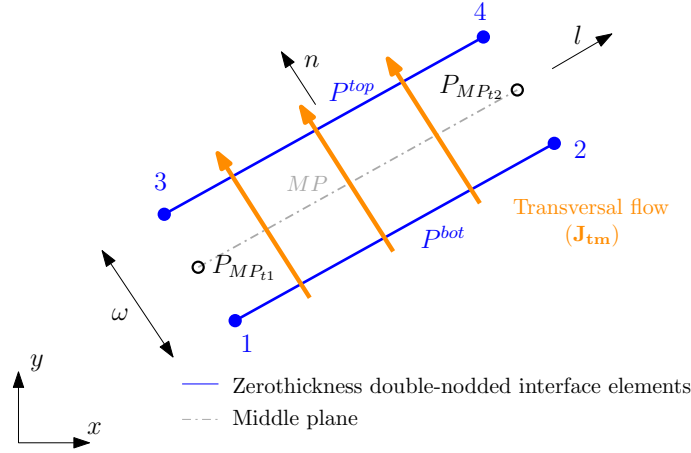


Figura 4: Element junta on es pot veure els nodes de l'element junta (1, 2, 3 i 4) i els punts del pla mitjà ($P_{MP_{t1}}$ i $P_{MP_{t2}}$). Els valors en aquests pla mitjà corresponen a l'interpolació dels nodes 1 i 3 per a $P_{MP_{t1}}$ i, dels nodes 2 i 4 per a $P_{MP_{t2}}$.

$$J_l = \int_l \omega^T \frac{K_t}{\mu_g} P_t dl. \quad (55)$$

Aplicant *General Galerkin* ($\omega = N_j$) i discretitzant $P_t = N_j \bar{P}_t$,

$$J_l = \left(\int_l N_j^T \frac{K_t}{\mu_g} N_j dl \right) \bar{P}_t. \quad (56)$$

Matricialment es pot escriure com,

$$J_l = \bar{H}_{jj} \bar{P}_t. \quad (57)$$

Arribats aquest punt, el flux transversal està formulat per als nodes del pla mitjà ($P_{MP_{t1}}$ i $P_{MP_{t2}}$). Aplicant l'equació de transformació nodal (equació 54) es pot reescriure el sistema matricial (equació 57) en funció dels nodes de la discontinuïtat com,

$$\boxed{\bar{J}_l = (T_{trans}^T \bar{H}_{jj} T_{trans}) \hat{P}.} \quad (58)$$

on

$$T_{trans}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

4 Exemples d'aplicació

En aquest treball s'ha implementat amb una discretització d'elements finits la formulació monofàsica per a fluid compressible tant per a anàlisis estacionaris com per a anàlisis transitoris. Abans de la implementació es va analitzar acuradament les diferències d'aquesta formulació amb la formulació més general de fluid incompressible (fluids com ara l'aigua o el petroli). D'aquesta manera a l'hora d'implementar la formulació s'ha permès que en el codi es pugui escollir si el fluid que es vol modelar és incompressible o compressible simplement tenint present que la densitat sigui constant o no. En aquest treball es presenten un ventall d'exemples variats començant per exemples de verificació del codi on es va augmentat el nivell de complexitat en cada exemple.

Aquest apartat s'estructura de la següent manera; en la secció 4.1 es presenten exemples on el que es vol comprovar és la validesa de la formulació i implementació del codi que proposem. Per aquest motiu es presenten exemples tant per al règim estacionari com per al règim transitori. Cada règim conté dos exemples que corresponen en realitzar la anàlisi per al fluid incompressible (aigua o petroli) que es compararà amb els resultats obtinguts amb el codi DRAC que disposem en el grup *MECMAT* i, la anàlisi per al fluid compressible (gas) que es compararà amb les solucions analítiques que hi ha descrites en la literatura del gas (Zhu et al., 2007; Beygi and Rashidi, 2011; Wu and Pruess, 1998; Li et al., 2011).

En la secció 4.2 es realitzarà un anàlisi comparatiu entre les diferències de modelar fluid incompressible i compressible. Els resultats amb fluid incompressible són obtinguts amb el codi DRAC i els resultats dels anàlisi compressibles són obtinguts pel codi que s'ha implementat. A fi de ser més identificatiu i còmode, el codi que hem implementat en aquest treball l'anomenarem DracMGas ó en alguns casos DracM. En aquesta secció (secció 4.2) presentem un exemple simple on s'estableix les diferències d'estar tractant amb un fluid incompressible i compressible i per altre banda, també es presenta el cas de buidatge d'un reservori.

Finalment, la implementació de juntes en el codi ha estat molt recent però, la versatilitat que li dóna al codi és molt àmplia. Per això, la secció 4.3 està enfocada en les modelacions de fluid compressible amb discontinuïtats on es presenta; un exemple simple amb una discontinuïtat horitzontal i l'exemple de buidatge del reservori anterior però ara afegint-li discontinuïtats. Aquest últim exemple està readaptat de l'exemple d'un reservori fracturat presentat per Guiducci et al. (2002) i analitzat posteriorment per Segura and Carol (2007) on en ambdós casos es va analitzar per a fluid incompres-

sible.

4.1 Exemples de verificació en medi porós

En aquesta secció es presenten uns exemples simples on el que es vol comprovar és el correcte funcionament de la implementació de la formulació presentada en aquest treball. Com ja s’ha comentat, el codi que s’ha implementat en aquest treball, anomenat DracMGas, està enfocat per a modelacions de fluid compressible. Però això no treu que no es puguin obtenir certes comparatives amb el codi DRAC establint una taula de conversió de paràmetres, ja que, en el codi DracMGas els inputs són: el factor de compressibilitat del gas (β), la permeabilitat del gas (k_g), la densitat del gas (ρ_g) i la viscositat del gas (μ_g) i, en canvi, els inputs del DRAC són: pes específic del fluid (γ_f), conductivitat del fluid (K_f), *fluid bulk modulus* (k_w) entre d’altres. Com que el codi DracMGas a l’hora de la seva implementació es va tenir present que es poguessin fer càlculs tant per a fluid compressible com per a incompressible simplement tenint present que la densitat sigui constant o no, podem realitzar verificacions amb el codi Drac i comparar els resultats entre ambdós codis. Cal remarcar que aquesta comparativa de codis només serà possible si es modela fluid incompressible. Pels casos de modelacions amb fluid compressible els compararem amb les solucions analítiques trobades en la literatura (Wu and Pruess, 1998; Li et al., 2011; Beygi and Rashidi, 2011; Zhu et al., 2007). Així doncs en aquesta secció 4.1 es presenten 4 exemples simples on s’analitza el cas estacionari i el transitori per als dos tipus de fluids que podem modelar.

4.1.1 Exemple 1, anàlisi estacionari amb fluid incompressible

En aquest exemple analitzarem un problema estacionari unidimensional com si estiguéssim modelant un estrat horitzontal on tenim fluïnt un fluid incompressible (com ara aigua). Aquests estrat de roca té unes dimensions de 20m de llarg, el fluid és monofàsic i ens trobem en condicions isotèrmiques. Les condicions de contorn són les següents: A l’extrem esquerra ($P(x = 0)$) imposem una pressió de $2.7 \cdot 10^5 Pa$ i a l’extrem dret ($P(L = 20)$) s’imposa una pressió de $1.0 \cdot 10^5 Pa$. Els paràmetres del fluid que es mostren en la taula 2 estan extrets de Zhu et al. (2007). La discretització del model s’ha realitzar mitjançant elements quadrilàters en tot el domini donant així un total de 404 nodes i 200 elements. La figura 5 mostra la malla generada en aquest exemple.

Paràmetres	Valor
Permeabilitat absoluta del gas (K_{∞})	$1.0 \cdot 10^{-15} m^2$
Longitud de l'estrat (L)	$20m$
Factor de compressibilitat (β)	$1.18 \cdot 10^{-5} kg/Pa \cdot m^3$
Porositat (ϕ)	0.3
Viscositat dinàmica del fluid (μ_f)	$1.84 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$
Densitat del fluid (ρ_f)	$1.0 kg/m^3$

Taula 2: Paràmetres utilitzats de l'exemple 1 (dades extretes de Zhu et al. (2007)).



GiD

Figura 5: Discretització de l'estrat de 20 m de llarg en 200 elements quadrilàters.

En la figura 6 podem veure la distribució de pressions per al cas estacionari on en vermell continu es troba la solució numèrica obtinguda amb el codi DracMGas (codi que s'ha implementat en aquest treball) i en blau puntejat es troba la solució numèrica obtinguda amb el codi DRAC. En la figura 7 es representa la distribució de pressions amb una escala de colors, i es pot veure com aplicant la mateixa escala la distribució de pressions és idèntica pels dos codis.

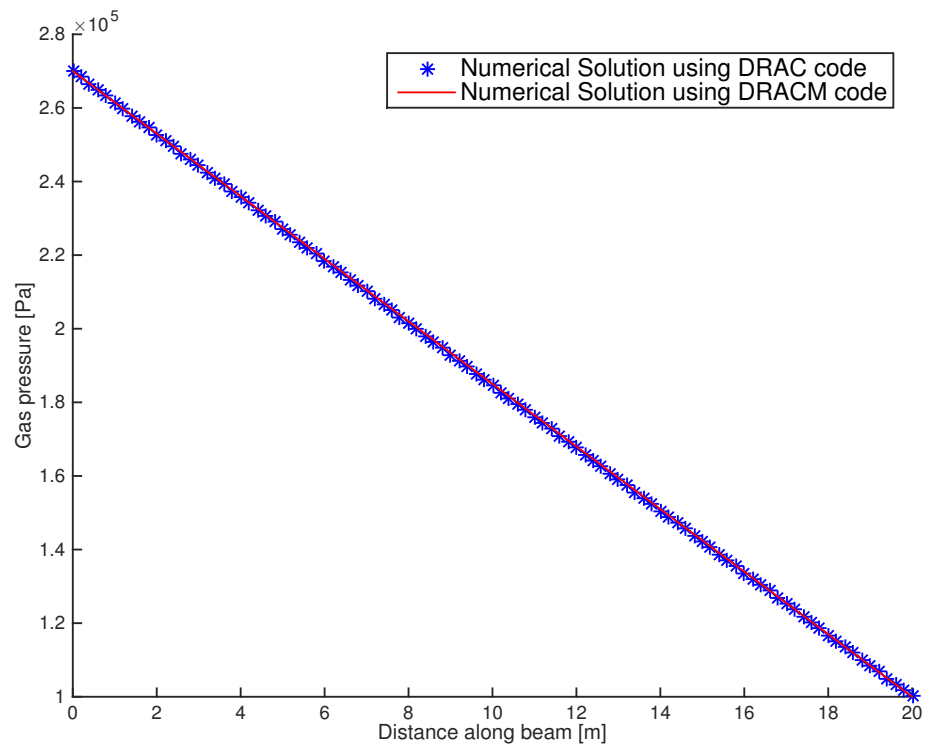


Figura 6: Distribució de pressió de fluid al llarg dels 20m de l'estrat. En vermell continu la solució numèrica obtinguda amb el codi DracMGas i en puntejat blau, la solució numèrica obtinguda amb el codi DRAC.

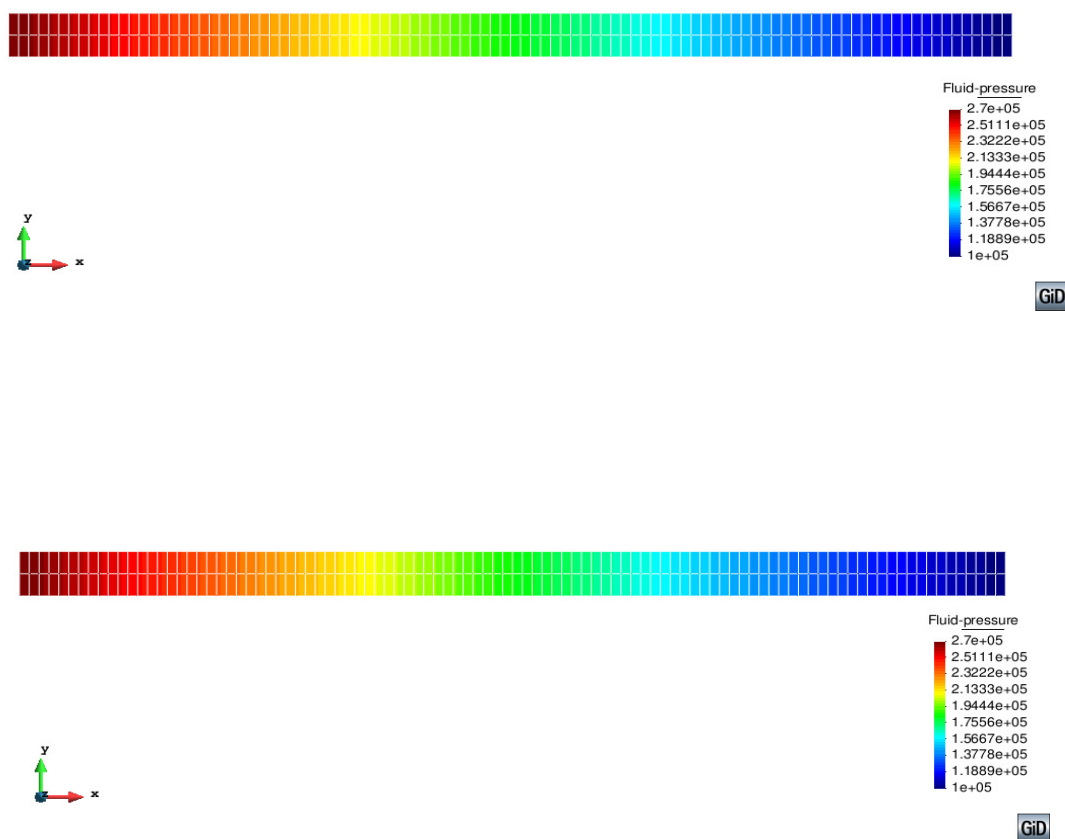


Figura 7: Distribució de pressió de fluid amb una escala de colors al llarg dels 20m. La imatge de dalt correspon als resultats amb el codi DRAC i la segona imatge correspon als resultats obtinguts amb DracMGas.

4.1.2 Exemple 2, anàlisi estacionari amb fluid compressible i comparativa de l'efecte Klinkenberg

Un cop validat que el codi implementat, DracMGas, permet la modelació de fluid incompressible, és el moment de valiar-lo per a fluid compressible. En aquest exemple ens basem en el mateix model de l'exemple 1 però, ara modelarem un fluid compressible. Així doncs, ens trobem igualment amb un fluid monofàsic i isotèrmic on el que realitzarem és la comparativa amb la solució analítica plantejada per Zhu et al. (2007) i la solució numèrica obtinguda amb el codi DracMGas. Les condicions de contorn que aplicarem són; a l'extrem esquerra imposablem un cabal màssic d'injecció (Q_m) de $1.0 \cdot 10^{-6} Kg/s$, i a l'extrem dret mantenim la mateixa pressió imposada que en l'exemple 1 ($P(L) = 1.0 \cdot 10^5 Pa$). Els paràmetres utilitzats en aquest exemple i que es mostren en la taula 3 han estat extrets d'un estudi de laboratori de *welded tuff* a la muntanya de Yucca (Reda, 1987).

Paràmetres	Valor
Factor de Klinkenberg (b)	$7.6 \cdot 10^5 Pa$
Permeabilitat absoluta del gas (K_∞)	$5.0 \cdot 10^{-19} m^2$
Longitud de l'estrat (L)	$10m$
Factor de compressibilitat (β)	$1.18 \cdot 10^{-5} kg/Pa \cdot m^3$
Porositat (ϕ)	0.3
Viscositat dinàmica del gas (μ_g)	$1.84 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$
Densitat del gas (ρ_g)	$1.0 kg/m^3$

Taula 3: Paràmetres utilitzats de l'exemple 2 (dades extretes de Reda (1987)).

L'equació del balanç de massa unidimensional pel cas estacionari (equació 5) és pot expressar de la següent manera,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_\infty \beta (p + b)}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \quad (60)$$

La solució analítica amb l'efecte de Klinkenberg es pot expressar segons Zhu et al. (2007) com,

$$p(x) = -b + \sqrt{b^2 + P(L)^2 + 2bP(L) + \frac{2Q_m \mu_g (L - x)}{K_\infty \beta}}. \quad (61)$$

En un cas més simple, podem desestimar l'ús de l'efecte de Klinkenberg i per tant, la solució analítica que ens quedaria seria,

$$p(x) = \sqrt{P(L)^2 + \frac{2Q_m\mu_g(L-x)}{K_\infty\beta}}. \quad (62)$$

Amb aquestes dues solucions analítiques es pot veure que l'aplicació d'una condició de contorn de cabal imposat (Q_m) donarà diferent si tractem el cas amb o sense l'efecte de Klinkenberg. Així doncs, si apliquem els paràmetres de la taula 3 a l'equació 61 obtenim $P(x=0) = 7.1843 \cdot 10^6 Pa$, i si ara apliquem el mateix però, si l'efecte de Klinkenberg no està present (equació 62) obtenim $P(x=0) = 7.8983 \cdot 10^6 Pa$. En la figura 8 es mostren els dos resultats numèrics amb i sense efecte de Klinkenberg amb la solució analítica corresponent. Es pot veure com la distribució de pressions de gas en el cas d'aplicar l'efecte és menor que en el cas on no s'aplica.

Per altre banda, en aquest mateix exemple es pot fer un anàlisi per a veure com afecta el factor de Klinkenberg (b) a la distribució de pressions al llarg de l'estrat. Per aquest anàlisi canviem la condició de contorn esquerra on fins ara teníem un cabal màssic d'injecció ($Q_m = 1.0 \cdot 10^{-6} Kg/s$) per una pressió imposada ($P(x=0) = 7.8983 \cdot 10^6 Pa$). En la figura 9 podem veure com a mesura que el factor de Klinkenberg va augmentat ens anem apropant a la distribució lineal de pressions d'un fluid incompressible com la que s'ha obtingut en l'exemple 1.

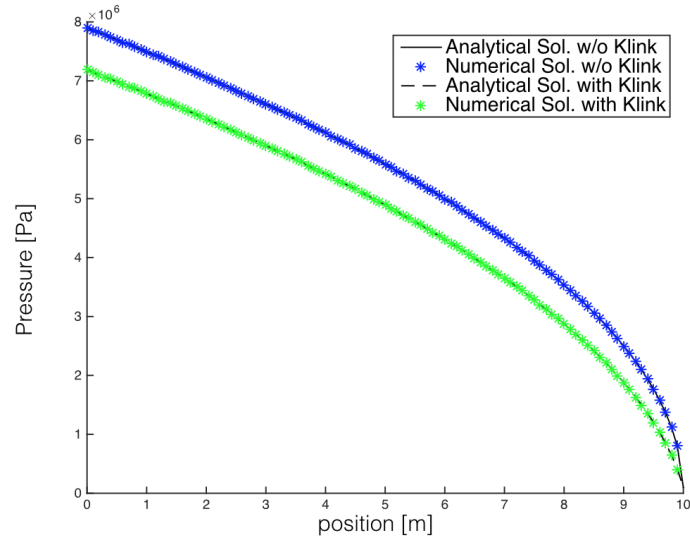


Figura 8: Distribució de pressió de gas al llarg dels 10m de l'estrat. Les línies contínues i discontinues negres corresponen a la solució analítica amb i sense Klinkenberg (equacions 61 i 62) respectivament. En puntejat blau, la solució numèrica calculada amb el codi DracMGas sense tenir present l'efecte de Klinkenberg i finalment, en puntejat verd, la solució numèrica obtinguda amb DracMGas però, tenint present l'efecte de Klinkenberg.

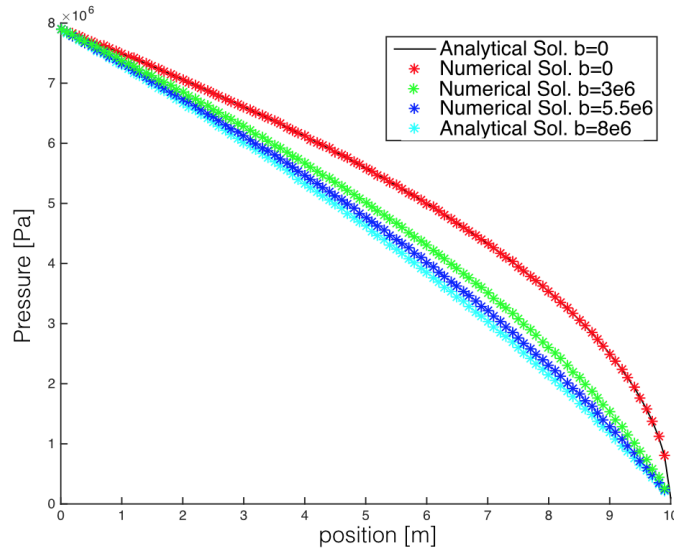


Figura 9: Afectació de l'efecte Klinkenberg on les condicions de contorn a esquerra i dreta són pressions prescrites de $7.8983 \cdot 10^6 Pa$ i $1.0 \cdot 10^5 Pa$ respectivament. En línia contínua es representa la solució analítica sense l'efecte de Klinkenberg ($b = 0$). En puntejat es veu la distribució de pressió de gas al llarg dels 10m de l'estrat per a diferents valors del factor de Klinkenberg (b).

4.1.3 Exemple 3, anàlisi transitori amb fluid incompressible

En aquest exemple resoldrem el mateix exemple que el resolt en la secció 4.1.1 però resolent-lo per al règim transitori. Els paràmetres que utilitzarem en aquest exemple estan definits en la taula 4. Per aquest cas, al tractar-se d'un anàlisi transitori, les condicions de contorn que aplicarem seran les mateixes que a l'exemple 1 però, alhora imposarem la condició inicial que s'aplica igual per a tot el domini i que serà una pressió inicial (P_0) de $1.0 \cdot 10^5 Pa$. Per a aquesta modelació es definiran dos *steps*; el primer s'utilitzarà per a aplicar les condicions de contorn per a un instant de temps relativament petit ($\Delta t = 600s$) i el segon *step* s'utilitzarà per a deixar passar el temps fins arribar a $t \rightarrow \infty$ o en altres paraules, fins arribar al règim estacionari. Tant en la figura 10 que representa la distribució de pressions en la secció longitudinal central, com en la figura 11 que es pot veure com la distribucions de pressions són iguals per a qualsevol secció longitudinal del model podem comprovar que els dos codi d'elements finits (DRAC i DracMGas) donen exactament els mateixos resultats per a diferents intervals de temps.

Paràmetres	Valor
Permeabilitat absoluta del gas (K_∞)	$1 \cdot 10^{-15} m^2$
Longitud de l'estrat (L)	$20m$
Factor de compressibilitat (β)	$1.18 \cdot 10^{-5} kg/Pa \cdot m^3$
Porositat (ϕ)	0.3
Viscositat dinàmica del gas (μ_g)	$1.84 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$
Densitat del gas (ρ_g)	$1.0 kg/m^3$

Taula 4: Paràmetres utilitzats de l'exemple 3.

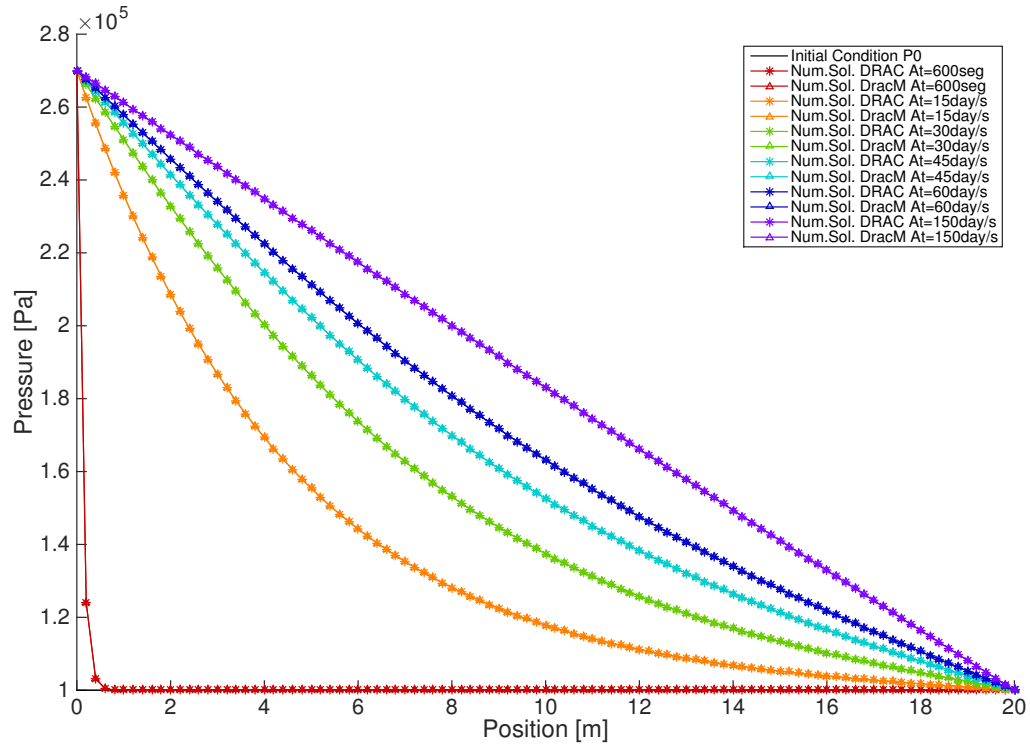


Figura 10: Distribució de pressió de gas al llarg dels 20m de l'estrat. Les línies amb el puntejat '*' correspon a la solució obtinguda amb el codi DRAC i les línies amb el puntejat '^' correspon a la solució obtinguda amb el codi DracMGas. La distribució de pressions que es mostren són per a temps de 600 segons, 15 dies, 30 dies, 45 dies, 60 dies i 150 dies que correspondria al cas estacionari per a fluid incompressible (veure Figura 6).

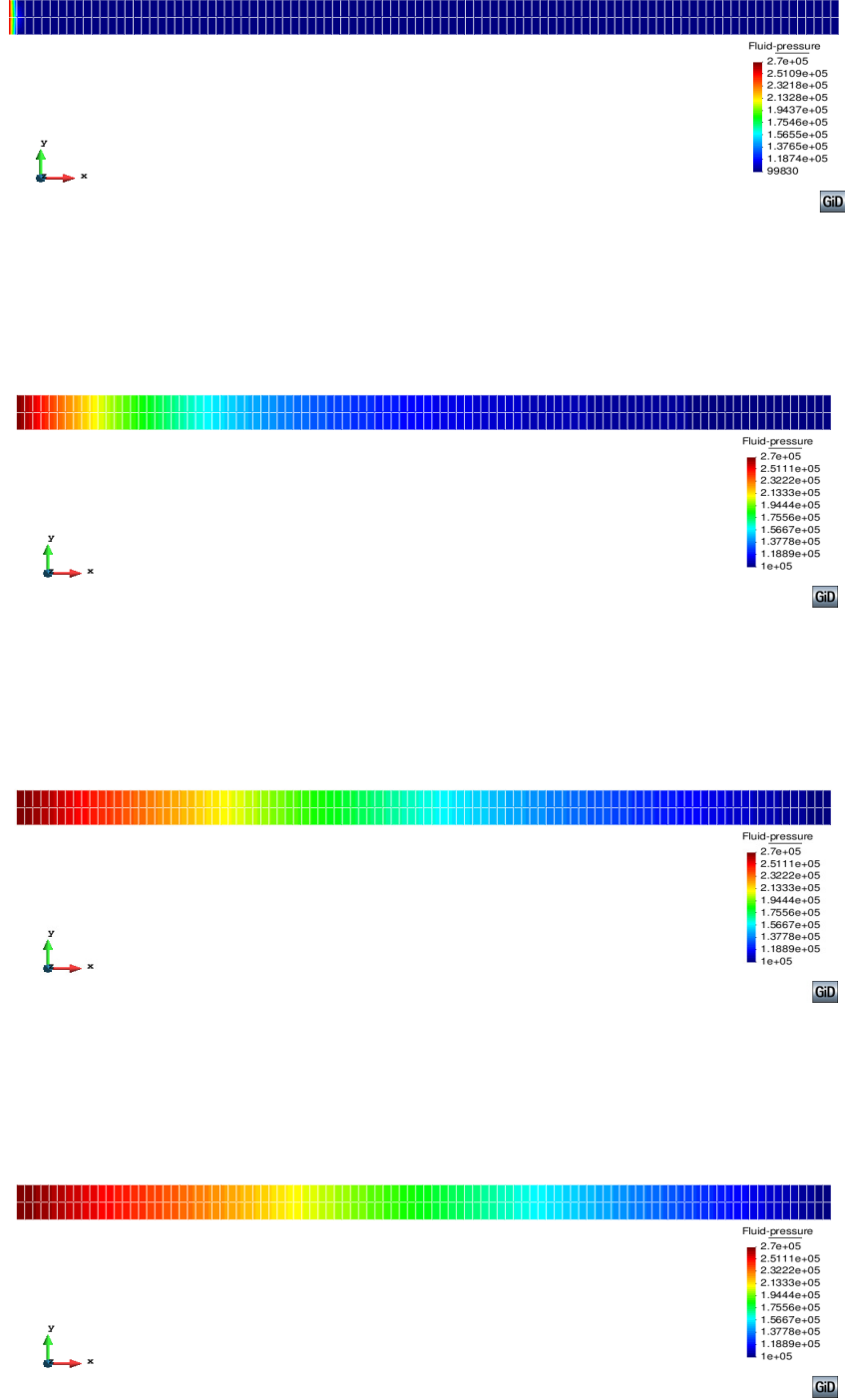


Figura 11: Representació de les pressions obtingudes amb el codi DracMGas al llarg de l'estrat. De dalt a baix es representen les pressions de gas per a temps 600 segons, 15 dies, 60 dies i 150 dies respectivament.

4.1.4 Exemple 4, anàlisi transitori amb fluid compressible

En aquest exemple compararem la solució obtinguda pel codi DracMGas amb la solució analítica que es pot trobar en diversos papers de la literatura de fluid compressible (Wu and Pruess, 1998; Zhu et al., 2007; Beygi and Rashidi, 2011; Kidder, 1957; Bear, 2013; Li et al., 2011; Clegg, 1968) o també readaptant lleugerament la solució analítica de l'equació de balanç de l'anàlisi tèrmic que es pot trobar en Martí et al. (1988) i Carslaw and Jaeger (1959). La solució analítica de Li et al. (2011) en regim transitori dóna la solució analítica a l'equació 11 però amb certes suposicions com que el terme de permeabilitat (\hat{K}) no és funció de l'espai i el terme de capacitat (\hat{C}) el linealitzza per una pressió mitjana \bar{P} . Així doncs, l'equació de balanç de massa que proposa Li et al. (2011) per a un cas unidimensional és,

$$\frac{\mu_g \phi}{\bar{P} K_g} \frac{\partial P^2}{\partial t} - \frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} = 0, \quad (63)$$

on μ_g és la viscositat del gas, ϕ és la porositat, K_g és la permeabilitat del gas i \bar{P} l'ajusta per una pressió ambient P_0 (Pa). La solució analítica de l'equació 63 s'expressa de la següent manera per a unes condicions de contorn fixades,

$$\begin{aligned} p(x=0, t) &= P_{in}. \\ p(x=l, t) &= P_0. \\ p(x, t=0) &= P_0. \end{aligned}$$

$$p^2(x, t) = P_0^2 + (P_{in}^2 - P_0^2) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2 \sqrt{\frac{k_g P_0}{\phi \mu_g} t}} \right). \quad (64)$$

on erfc és la funció d'error complementària, P_0 és la pressió inicial en el domini i també, la condició de contorn per a $x = l$ (extrem dret) i P_{in} és la pressió d'entrada per $x = 0$ (extrem esquerra).

Per altre banda, l'equació de balanç unidimensional que es defineix per a un anàlisi tèrmic segons Martí et al. (1988) és la següent,

$$\frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad (65)$$

on $K = k/\rho c = 0.00234375 \text{ m}^2/\text{h}$ i T és la temperatura (en $^\circ\text{C}$). La solució analítica de l'equació 65 per a unes condicions de contorn determinades s'expressa de la següent manera,

$$\begin{aligned} T(x=0, t) &= T_1. \\ T(x=l, t) &= T_2. \\ T(x, t=0) &= T_0. \end{aligned}$$

$$T(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_2 \cos(n\pi) - T_1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-Kn^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}. \quad (66)$$

Com es pot veure les equacions diferencials 63 i 65 són lleugerament iguals si s'efectuen alguns canvis de variables però, les corresponents solucions analítiques són certament diferents. D'aquesta manera, si a l'equació de balanç presentada per Martí et al. (1988) (equació 65) li redefinim T per P^2 i K per $\bar{P}K_g/\mu_g\phi$ obtenim la mateixa equació diferencial de la que parteix Li et al. (2011). Amb un exemple simple unidimensional podem comparar ambdós solucions analítiques i veure quines diferències tenen en la modelació del fluid compressible. Els paràmetres de l'exemple simple unidimensional estan definits en la taula 5.

Paràmetres	Valor
Permeabilitat del gas (K_g)	$1.0 \cdot 10^{-15} m^2$
Longitud (l)	$20m$
Porositat (ϕ)	0.35
Viscositat dinàmica del gas (μ_g)	$1.5 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$

Taula 5: Paràmetres per a l'exemple simple unidimensional.

Aplicant les següent condicions de contorn,

$$\begin{aligned} p(x = 0, t) &= P_{in} = 2.3 \cdot 10^5 Pa. \\ p(x = l, t) &= P_0 = 1.2 \cdot 10^5 Pa. \\ p(x, t = 0) &= P_0 = 1.2 \cdot 10^5 Pa. \end{aligned} \quad (67)$$

En la figura 12 es representa la solució analítica de Jian (Li et al., 2011) i la solució analítica d'Amadeu (Martí et al., 1988) realitzant els canvis de variables mencionats anteriorment. Es pot veure com per ambdós formulacions els resultats de la modelació és idèntic, per tant, tant una com l'altre la podem utilitzar per l'exemple que es vol modelar en aquesta secció. En aquest cas utilitzarem la solució que exposa Martí et al. (1988) readaptant-la per a que modeli el fluid compressible.

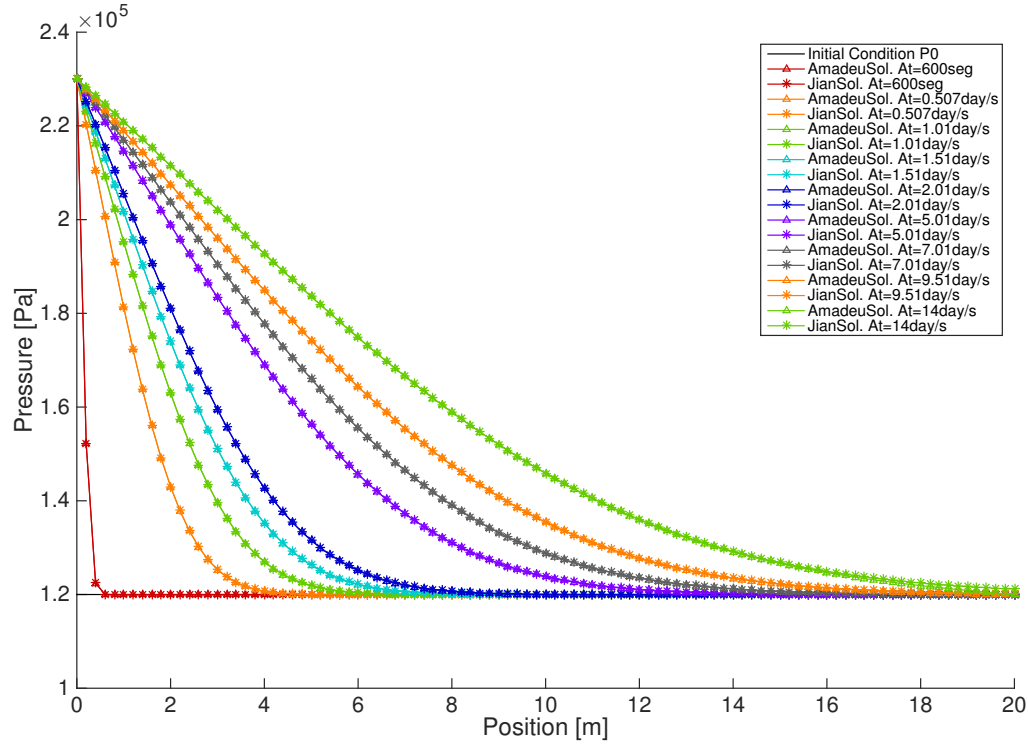


Figura 12: Distribució de pressió de gas al llarg dels 20m de longitud. Les línies amb el puntejat '*' correspon a la solució analítica obtinguda amb la formulació de Li et al. (2011) i les línies amb el puntejat '^' correspon a la solució analítica obtinguda amb la formulació de Martí et al. (1988). La distribució de pressions que es mostren són per a temps de 600 segons, 0.5 dia, 1 dia, 1.5 dies, 2 dies, 5 dies, 7 dies, 7.5 dies i 14 dies.

Tal i com s'ha fet en l'exemple 3 (secció 4.1.3), en aquest cas, resoldrem el mateix exemple que el resultat en la secció 4.1.1 però, resolent-lo per al cas transitori i per a fluid compressible. Així doncs, els paràmetres que utilitzarem seran els mateixos que apareixen en la taula 3. Per aquest cas, al tractar-se d'un anàlisi transitori, les condicions de contorn que aplicarem seran les mateixes que a l'exemple 1 (secció 4.1.1) però, ahora imposarem la condició inicial que s'aplica igual per a tot el domini i que serà una pressió inicial (P_0) de $1.0 \cdot 10^5 Pa$. Per a aquesta modelació es definiran dos *steps*; el primer s'utilitzarà per a aplicar les condicions de contorn per a un instant de temps relativament petit ($\Delta t = 600s$) i el segon *step* s'utilitzarà per a deixar passar el temps fins arribar a $t \rightarrow \infty$, o en altres paraules, fins arribar al cas estacionari. En la figura 13 i 14 estan representades les distribucions de pressions per a diferents intervals de temps. En la figura 13 es compara la solució numèrica obtinguda amb el codi DracMGas amb

la solució analítica que descriu Martí et al. (1988). Es pot veure que les pressions de gas per a cada instant de temps són molt similars però, no idèntiques. El mateix passaria si representéssim la solució de Li et al. (2011), ja que, en el la figura 12 s'ha pogut comprovar que donen la mateixa distribució de pressions ambdós solucions analítiques. Una possible explicació d'aquesta diferència entre la solució numèrica obtinguda amb DracMGas i la solució analítica podria recaure en el fet que, per trobar la sol·lució analítica, l'equació diferencial original de les equacions 63 i 65 es simplifica en base a una linealització de la pressió en el terme capacitat (\hat{C}) per una pressió mitja constant en el temps (\bar{P}).

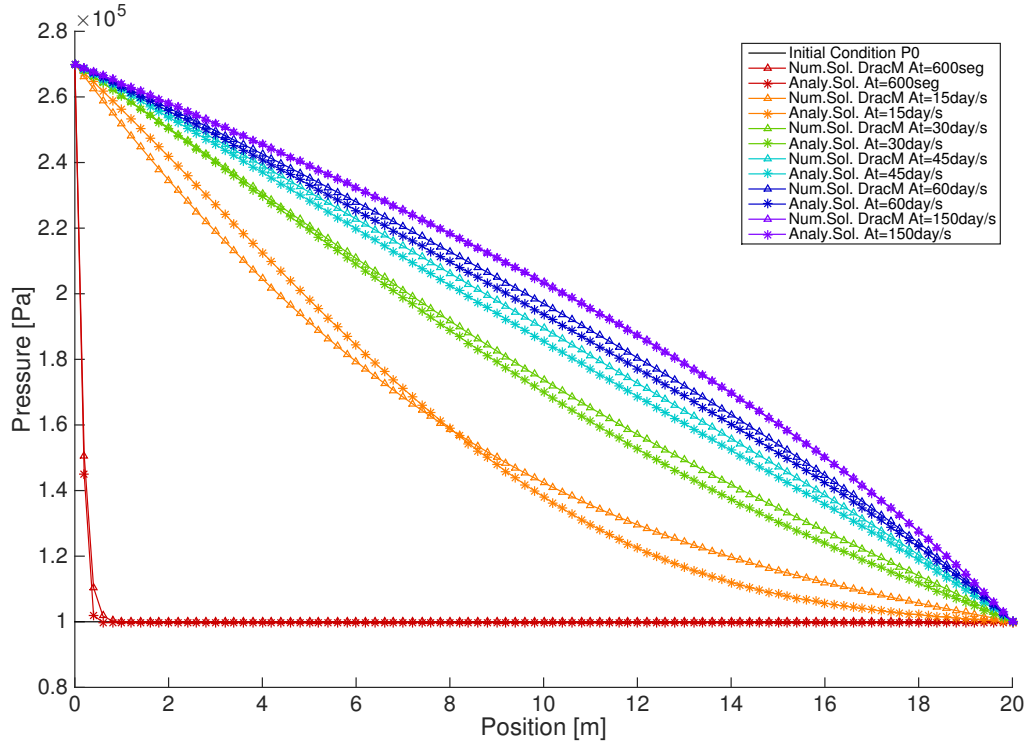


Figura 13: Distribució de pressions en una secció longitudinal de la part central del domini. Les línies amb el puntejat '*' correspon a la solució analítica obtinguda amb la formulació que descriu Amadeu en la seva tesi (Martí et al., 1988) i les línies amb el puntejat '^' correspon a la solució numèrica obtinguda amb el codi DracMGas. La distribució de pressions que es mostren són per a temps de 600 segons, 15 dia, 30 dia, 45 dies, 60 dies, 150 dies que correspondria al cas estacionari per a fluid compressible (veure Figura 8 cas sense l'efecte de Klinkenberg, $b = 0$).

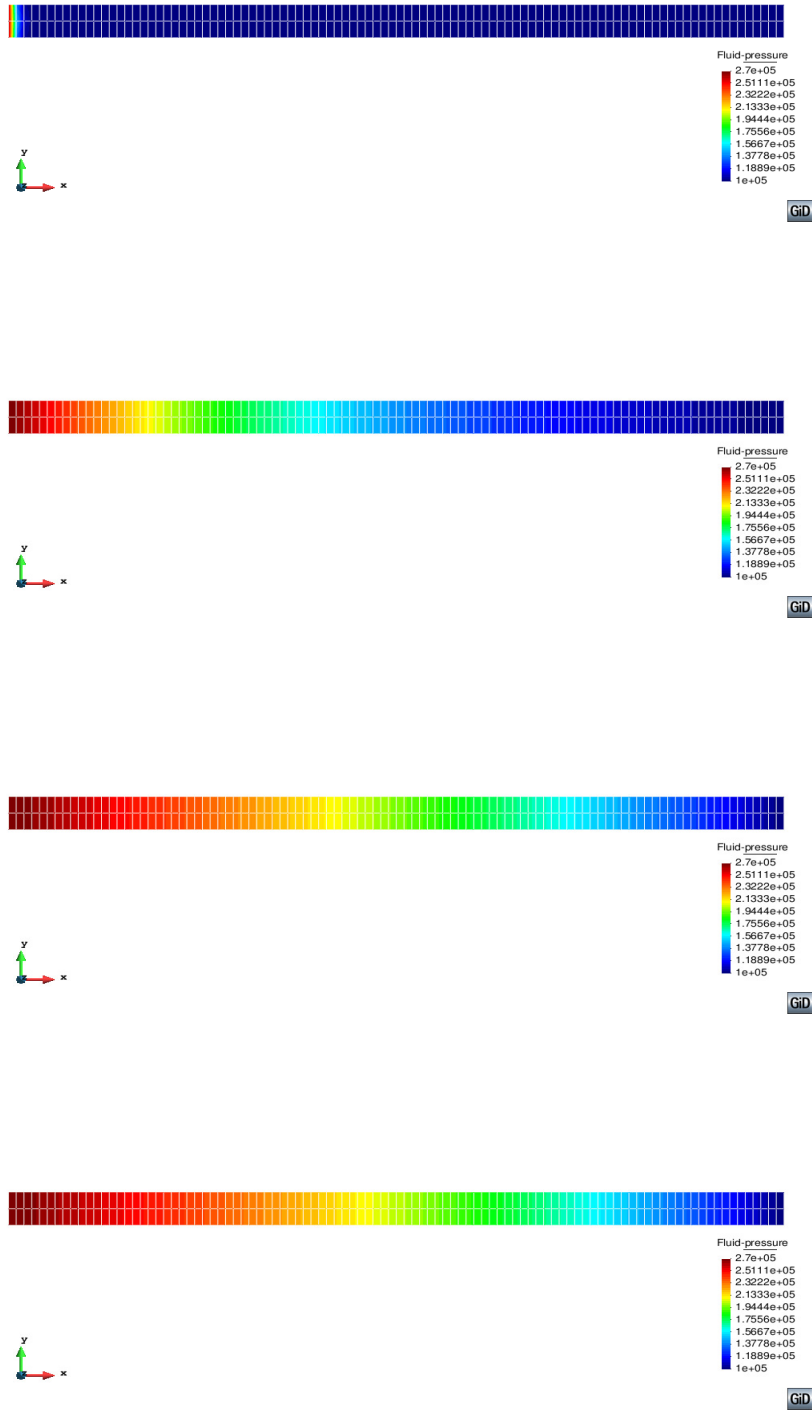


Figura 14: Representació de les pressions obtingudes amb el codi DracMGas al llarg dels 20m d'estrat. De dalt a baix es representen les pressions de gas per a temps de 600 segons, 15 dies, 60 dies i 150 dies.

4.2 Exemples acadèmics comparant el fluid compressible (*DracM-Gas*) i l'incompressible (*Drac*) en medi porós

Com ja s'ha pogut veure en els diferents exemples de l'apartat 4.1, la modelació de fluid incompressible i compressible dóna solucions estacionaries diferents. En aquest apartat volem analitzar en més detall les diferències de comportament entre ambdós fluids. En la figura 15 presentem un model unidimensional on es pot veure la solució estacionaria del fluid compressible (puntejat '*') i del fluid incompressible (puntejat '^').

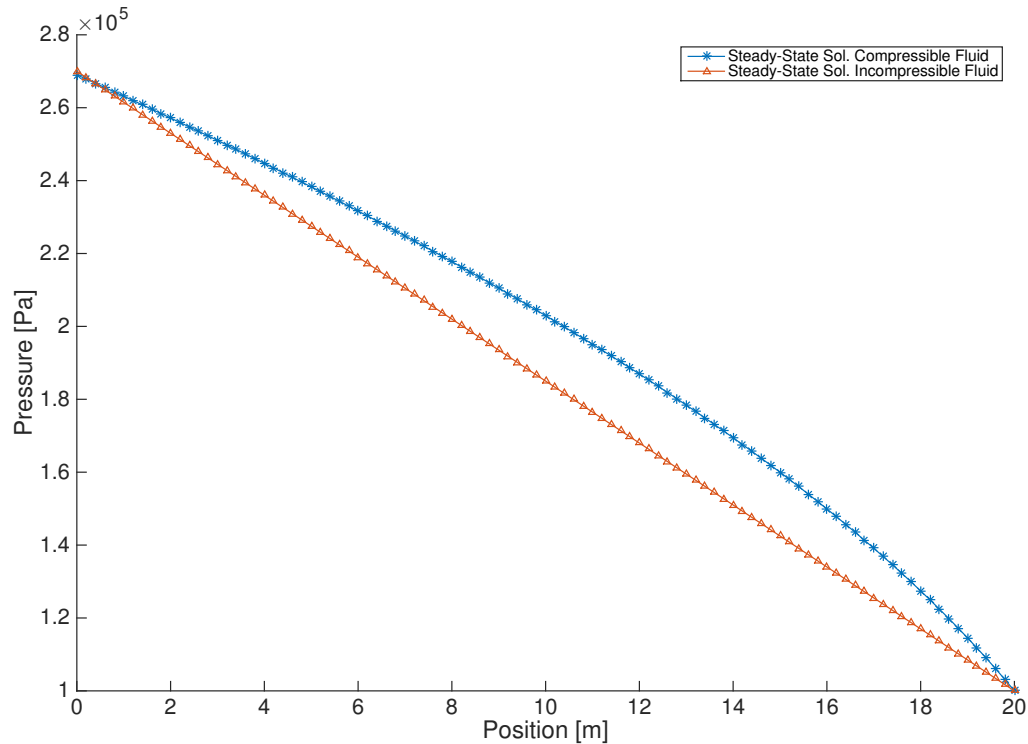


Figura 15: Solució del cas estacionari d'un fluid compressible (en línia '*') i d'un fluid incompressible (línia '^').

Per l'equació de balanç sabem que el que entra menys el que surt és igual al que s'acumula. Per tant, un cop el sistema ha arribat a l'estat estacionari, si discretitzem el model unidimensional en petites seccions i apliquem l'equació de balanç en cada una d'elles, podem veure com el que entra ha de ser igual al que surt degut a que ja no es pot acumular més fluid en el sistema. En el cas de fluid compressible, aquest balanç s'ha de fer en termes de massa (equació 2), és a dir, la quantitat de massa que entra ha de ser igual en totes els punts i per tant el flux màssic (j_m) ha de ser igual en tots els punts del domini (figura 16). Si ens fixem en la distribució de pressions de la figura 15 veiem

com hi ha una disminució de pressió a mesura que ens desplacem per l'eix longitudinal del model (eix 'x'). Analitzant la llei de Darcy en termes de flux màssic (equació 21) es pot veure com en disminuir la pressió del fluid, la densitat (ρ_g) disminueix (equació 3) i per tant, el flux volumètric (j_v) ha d'augmentar proporcionalment per a mantenir que el flux màssic (j_m) sigui constant en tot el domini. El flux volumètric (j_v) és defineix per la llei de Darcy (equació 25) i com el terme de permeabilitat (K/μ_g) és constant per a diferents gradients de pressions (∇P) si no es té present l'efecte de Klinkenberg ($b = 0$). Això dona lloc a que el gradient de pressions, per a complir l'equació de balanç de massa, ha de ser cada vegada més alt donant així una pendent més forta. En figura 16 es representa el flux màssic i volumètric d'un fluid compressible. Es pot veure com el flux màssic (j_m) és constant en tot el domini mentre que el flux volumètric (j_v) va augmentat a mesura que la pressió disminueix. Per altre banda, en el fluid incompressible parlar de flux volumètric o màssic és el mateix amb valors constants però diferents per a cadascun, ja que, la densitat no varia en funció de la pressió i, com $j_m = \rho_f j_v$, el gradient de pressions és constant.

Per altre banda i per continuïtat, un cop s'ha arribat al règim estacionari el cabal d'entrada ha de ser igual al cabal de sortida donant així a entendre que en el sistema no s'acumula més fluid. Això és vàlid tant per a fluid compressible com per a fluid incompressible. En la figura 17 es pot veure el cabal d'entrada ($Q_M^{entrada} > 0$) amb un valor positiu i el cabal de sortida ($Q_M^{sortida} < 0$) amb un valor negatiu però, tots dos cabals tenen el mateix valors amb signes oposats tant per al cas de fluid compressible com per al fluid incompressible.

Un cop analitzat els diversos aspectes que diferencien el fluid compressible del incompressible, en els següents exemples s'analitzarà les diferències d'estar tractant amb un fluid incompressible i compressible. El primer exemple es basa en l'exemple 1 resolt en l'apartat 4.1.1 i realitzarà la comparativa de tots dos fluids i, el segon exemple és un exemple senzill aplicable en diferents àmbits que es basa en modelar el buidatge d'un reservori on només se li permet sortir el fluid per un extrem del domini. S'analitzarà l'afectació d'aquest buidatge tant si es tracte d'un fluid compressible com incompressible.

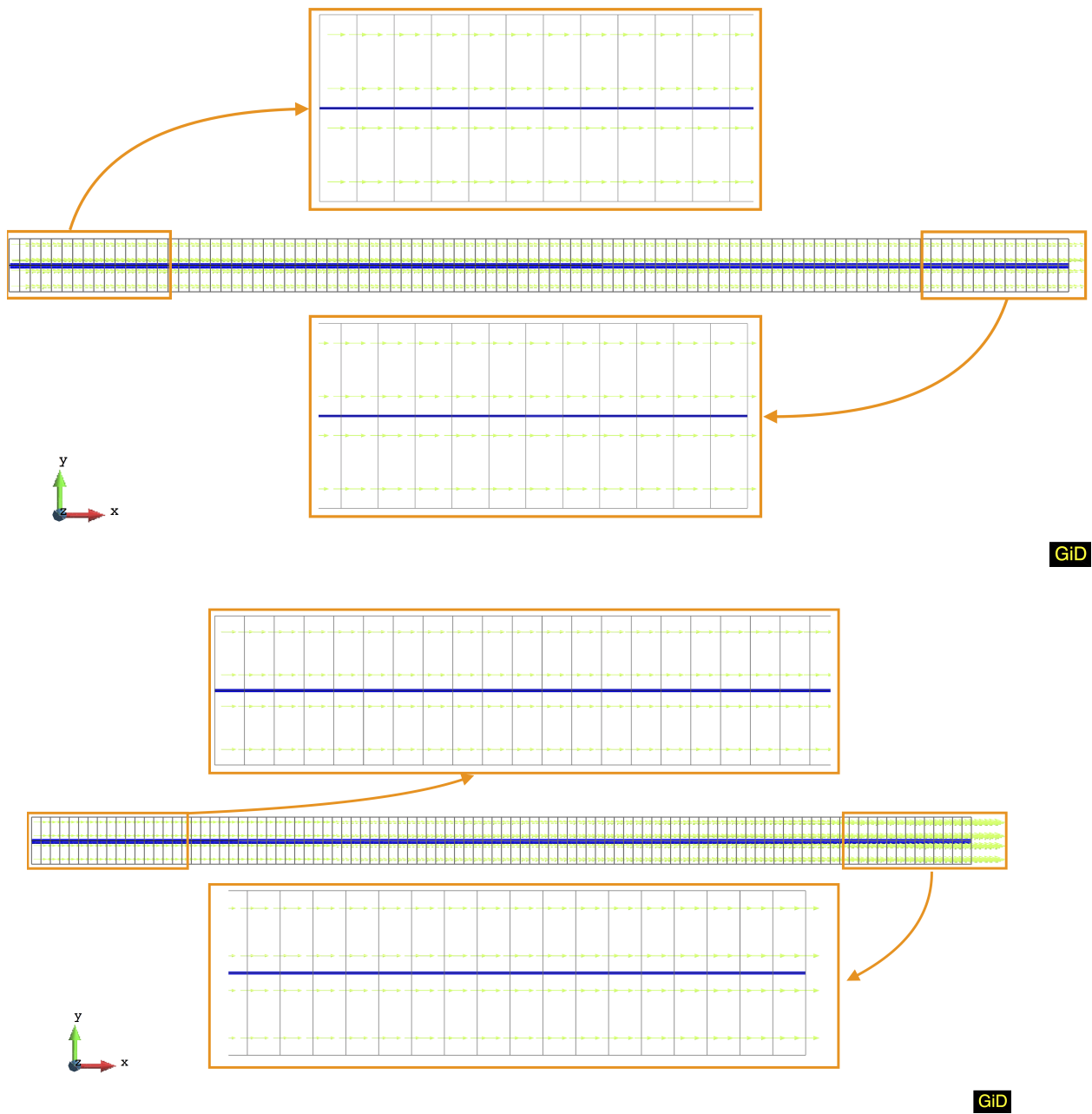


Figura 16: Representació vectorial del flux màssics (imatge superior) i del flux volumètric (imatge inferior) per a fluid compressible.

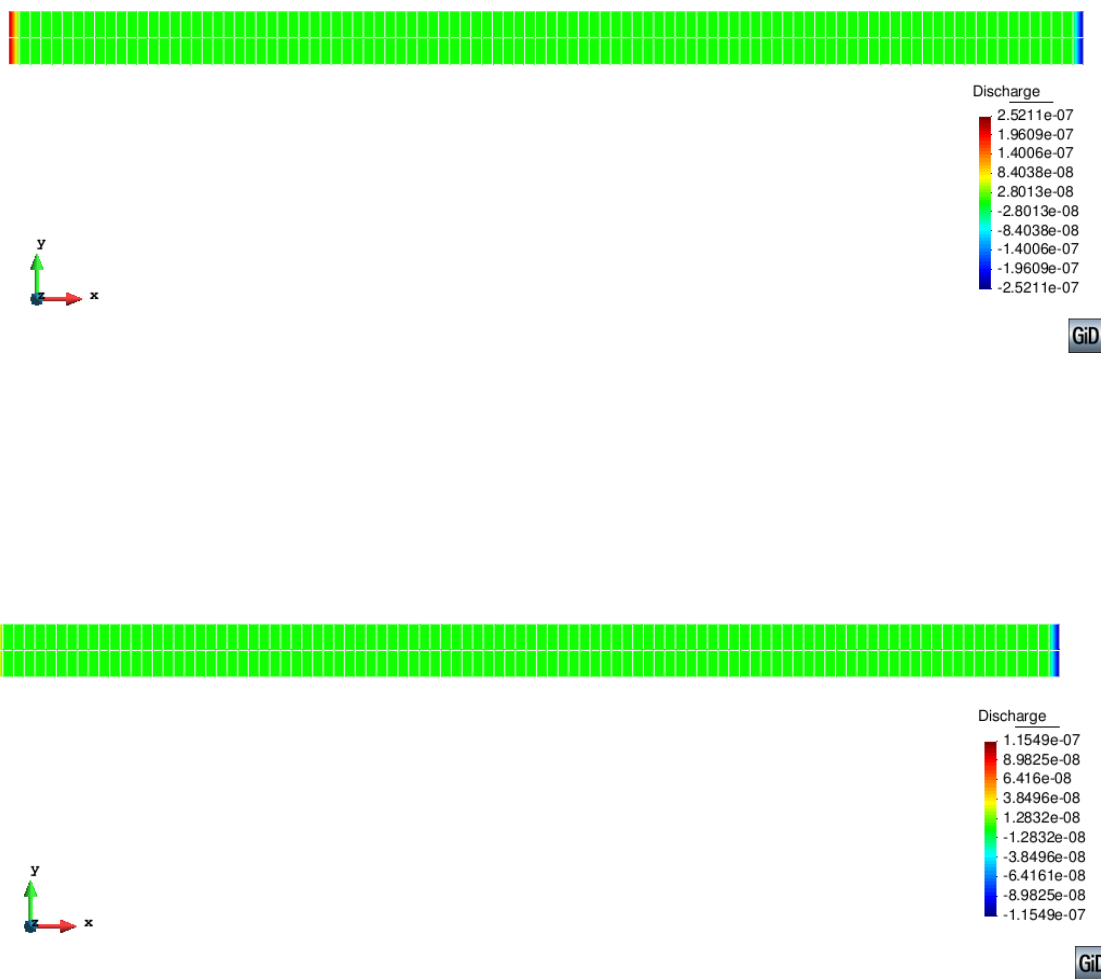


Figura 17: Representació en escala de colors dels cabals màssics de fluid compressible (primera imatge) i incompressible (segona imatge).

4.2.1 Exemple 5, comparació de fluid compressible i fluid incompressible en règim transitori

Tal i com s'ha fet en l'exemple 4 (secció 4.1.4), en aquest cas, resoldrem el mateix exemple que el resolt en la secció 4.1.1 però, resolent-lo per al cas transitori i per a fluid compressible i incompressible. Així doncs, els paràmetres que utilitzarem seran el mateixos que apareixen en el taula 2. Per aquest cas, al tractar-se d'un anàlisi transitori, les condicions de contorn que aplicarem seran les mateixes que a l'exemple 1 (secció 4.1.1) però, alhora imposarem la condició inicial que s'aplica igual per a tot el domini i que serà una pressió inicial (P_0) de $1.0 \cdot 10^5 Pa$. Per a aquesta modelació es definiran dos *steps*; el primer s'utilitzarà per a aplicar les condicions de contorn per a un instant de temps relativament petit ($\Delta t = 600s$) i el segon *step* s'utilitzarà per a deixar passar el temps fins arribar al règim estacionari. En les figures 18 i 19 estan representades les distribucions de pressions per a fluid compressible (puntejat 'o') i incompressible (puntejat '*') calculades amb els codis DracMGas i Drac respectivament. Com s'observa en la figura 18 es pot veure la comparativa de fluid compressible i incompressible en règim transitori que dona una quasi-coincidència a temps inicials, quan la pressió és molt similar a tot el model, i cada vegada hi ha més diferència a mesura que la pressió és més diferent fins la màxima diferència en el règim estacionari.

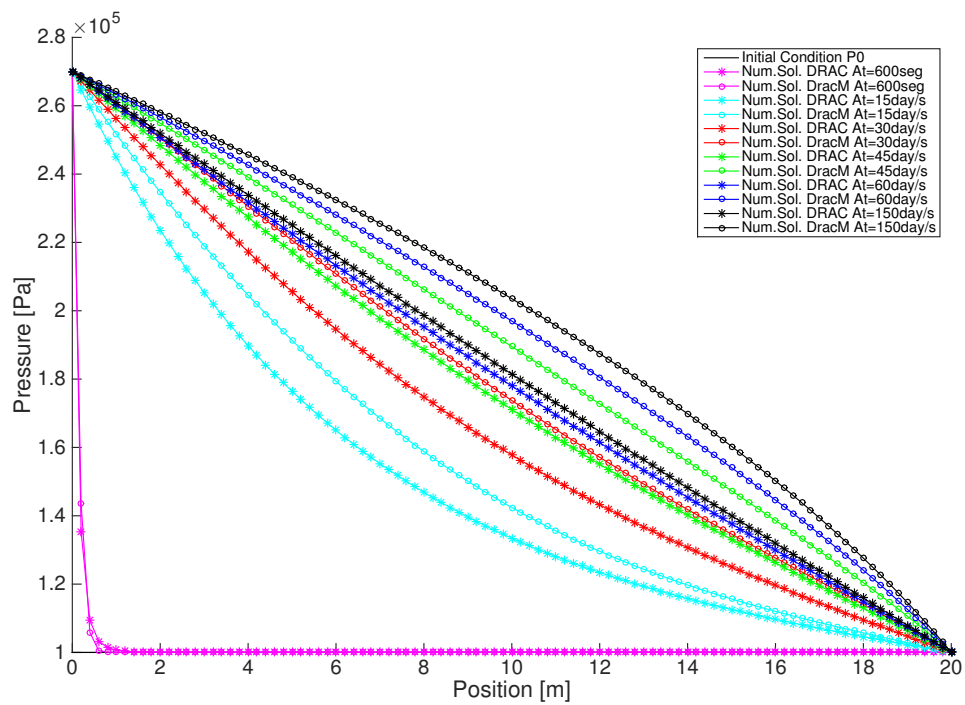


Figura 18: Comparativa de la distribuci3 de pressions on cada instant de temps correspon a un color. La l3nia amb puntejat '*' correspon a fluid incompressible (Drac) i la l3nia amb puntejat 'o' correspon a fluid compressible (DracMGas).

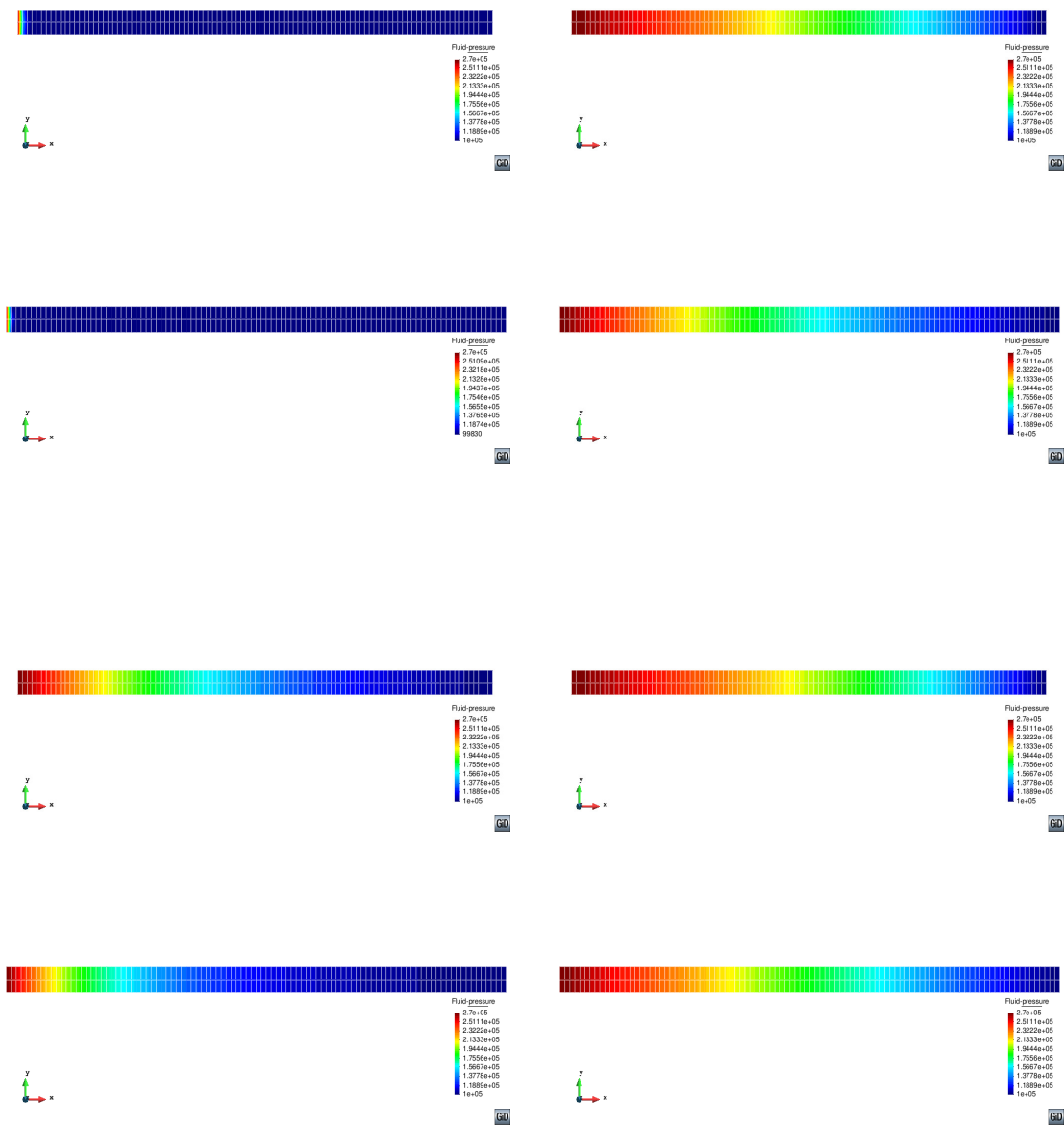


Figura 19: Distribució de pressions al llarg de l'estrat de 20m. Columna de l'esquerra: Primera i segona imatge correspon a temps de 600 seg compressible i incompressible respectivament. Tercera i quarta corresponen a temps de 15 dies compressible i incompressible respectivament. En la columna de la dreta: Primer i segon a temps 60 dies per a compressible i incompressible respectivament. I finalment, tercer i quart a temps a 150 dies (règim estacionari) per a compressible i incompressible respectivament.

4.2.2 Exemple 6, anàlisi de buidatge d'un reservori en medi porós

En aquest apartat es modelarà un reservori de 80 metres de llarg per 1 metre d'alt on en la part central hi ha un pou vertical que bombeja fluid cap a la superfície (figura 20). El reservori es troba a 300 metres de profunditat i la pressió dins del reservori abans de començar a bombejar pel pou és de $48.5MPa$. La pressió del fluid en el límit amb el pou es sotmet primer a una reducció de $13MPa$ durant 5 anys, a raó de $2.6MPa/any$ i una vegada que la pressió de fluid en el pou és $35.5MPa$, es manté constant durant 55 anys (figura 21). Suposem que l'efecte de la gravetat i l'efecte de Klinkenberg són negligibles.

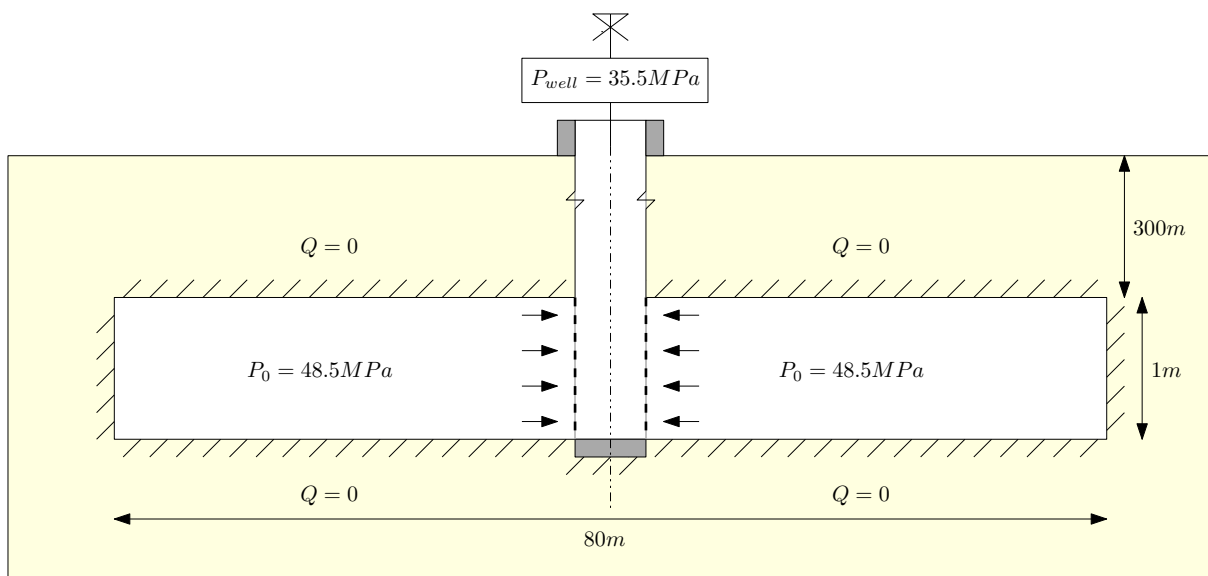


Figura 20: Geometria i condicions inicials per a la simulació del reservori.

Aquest reservori el resoldrem per a dues hipòtesis diferents; la primer se suposarà que el reservori és exclusivament de gas i per tant el fluid a bombejar pel pou és compressible i la segona, se suposarà que el reservori és únicament de petroli i per tant, el fluid a bombejar és incompressible. Amb tot i això, els paràmetres que aplicarem en ambdós hipòtesis seràn iguals perquè el que volem detectar són les diferències d'estar tractant amb un fluid compressible o amb un d'incompressible. Els paràmetres del problema estan definits en la taula 6.

Com que el reservori es simètric, el model a crear serà de la meitat. A l'hora de mellar s'ha generat una malla progressivament més densa en apropar-se al pou donant un total de 504 elements quadrilàters i 595 nodes. En un primer *step* s'aplica l'extracció

Paràmetres	Valor
Permeabilitat absoluta del gas (K_{∞})	$1.688 \cdot 10^{-19} m^2$
Longitud del dipòsit (L)	$80m$
Amplada del dipòsti (H)	$1m$
Factor de compressibilitat (β)	$3.33 \cdot 10^{-5} kg/Pa \cdot m^3$
Porositat (ϕ)	0.42
Pressió inicial (P_0)	$4.85 \cdot 10^7 Pa$
Viscositat dinàmica del fluid (μ_f)	$3 \cdot 10^{-4} Pa \cdot s$
Densitat del fluid (ρ_f)	$1.0 kg/m^3$

Taula 6: Paràmetres del reservori a 300 metres de profunditat.

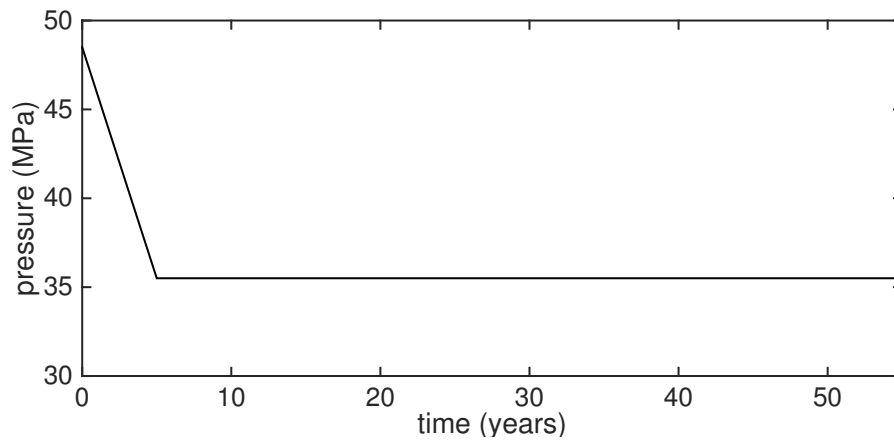


Figura 21: Evolució de la condició de contorn al costat de pou en funció del temps.

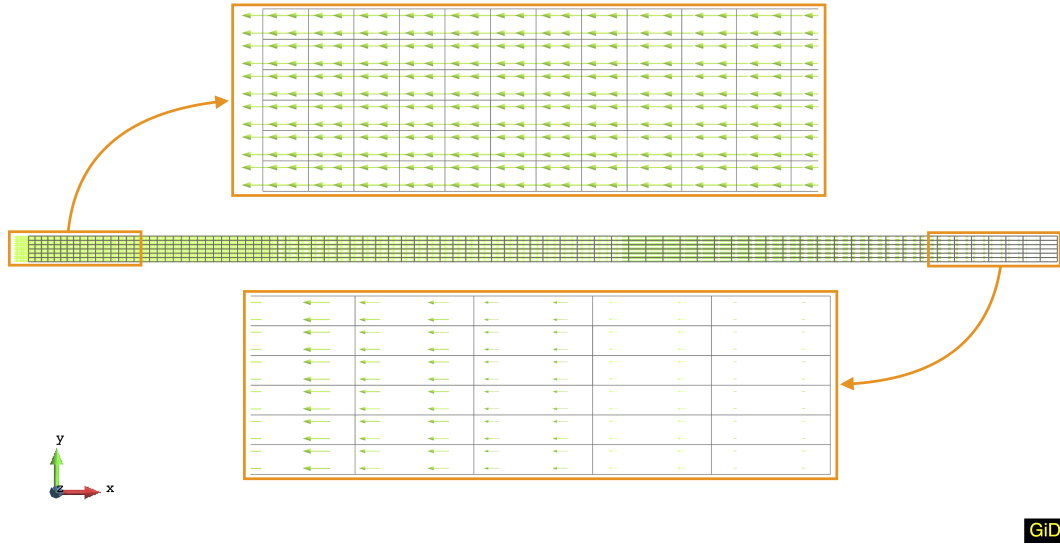


Figura 22: Representació vectorial del flux volumètric (j_v) en el domini del reservori en modelar el fluid compressible on es veu com el flux volumètric és gradualment més alt en apropar-se a l'extrem del pou (extrem esquerra).

de gas pel pou de $\Delta p = 13MPa$ en 2 increments arribant així a la pressió del pou de $35.5MPa$. En un segon *step* es deixa passar el temps fins arribar als 55 anys de la modelació del reservori. En la figura 21 es representa l'evolució de la condició de contorn al costat de pou on es bombejarà el fluid en funció del temps.

Per a la primera hipòtesis (cas de fluid compressible) podem veure l'evolució de les pressions de gas al llarg de l'eix longitudinal del reservori en la figura 23. Aquesta mostra els resultats de l'extracció paulatina a raó de $2.6 MPa/any$ en dos increments i l'efecte de deixar passar el temps fins arribar als 55 anys. Com ja s'ha comentat en altres exemples, el flux volumètric augmenta a mesura que ens apropem al pou d'extracció pel fet d'estar modelant un fluid compressible. En la figura 22 es presenta de forma vectorial aquest flux volumètric (j_v). La figura 23 compara la solució transitoria obtinguda amb el codi DracMGas amb la solució analítica de Li et al. (2011) (equació 64).

Resolent la segona hipòtesis, és a dir que el reservori és de petroli i tot el que s'extrau és fluid incompressible, obtenim una distribució de pressions molt diferents. En la figura 24 es representa l'evolució de pressions per al cas incompressible i es compara, per als mateixos intervals de temps, amb la distribució de pressió que s'obté per al fluid compressible. La comparativa de l'evolució de la pressió de gas i petroli en tot el domini per mitjà de l'ús de mapa de colors es mostra en la figura 25.

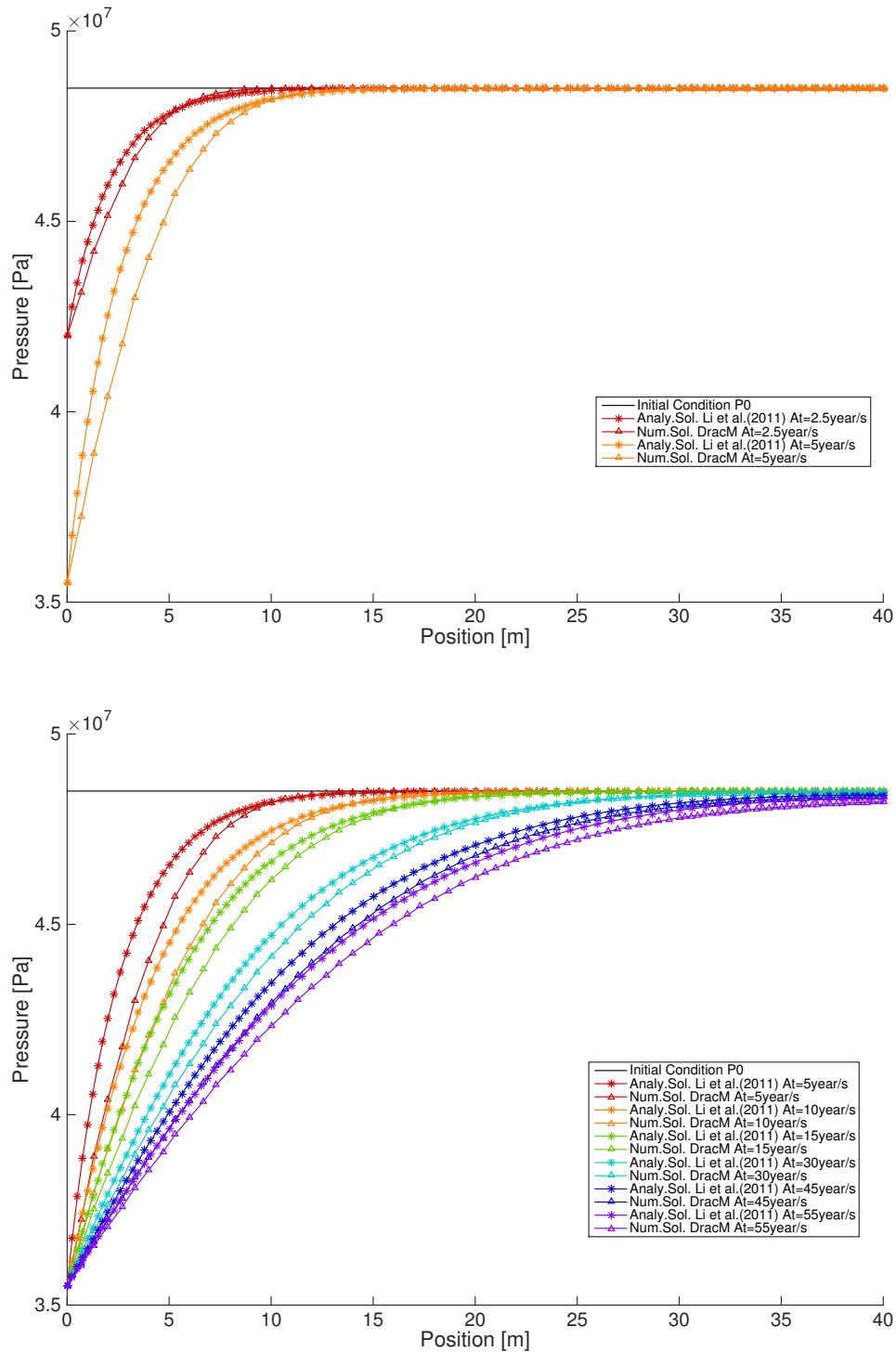


Figura 23: Evolució de la pressió de gas dins del reservori on en línia puntejada '*' es representa la solució numèrica del codi DracMGas i en línia puntejada '^' es representa la solució analítica del cas transitori (equació 64). El primer gràfic correspon al *step* de bombeig del pou i el segon gràfic representa la evolució de la pressió en el transcurs del temps fins als 55 anys.

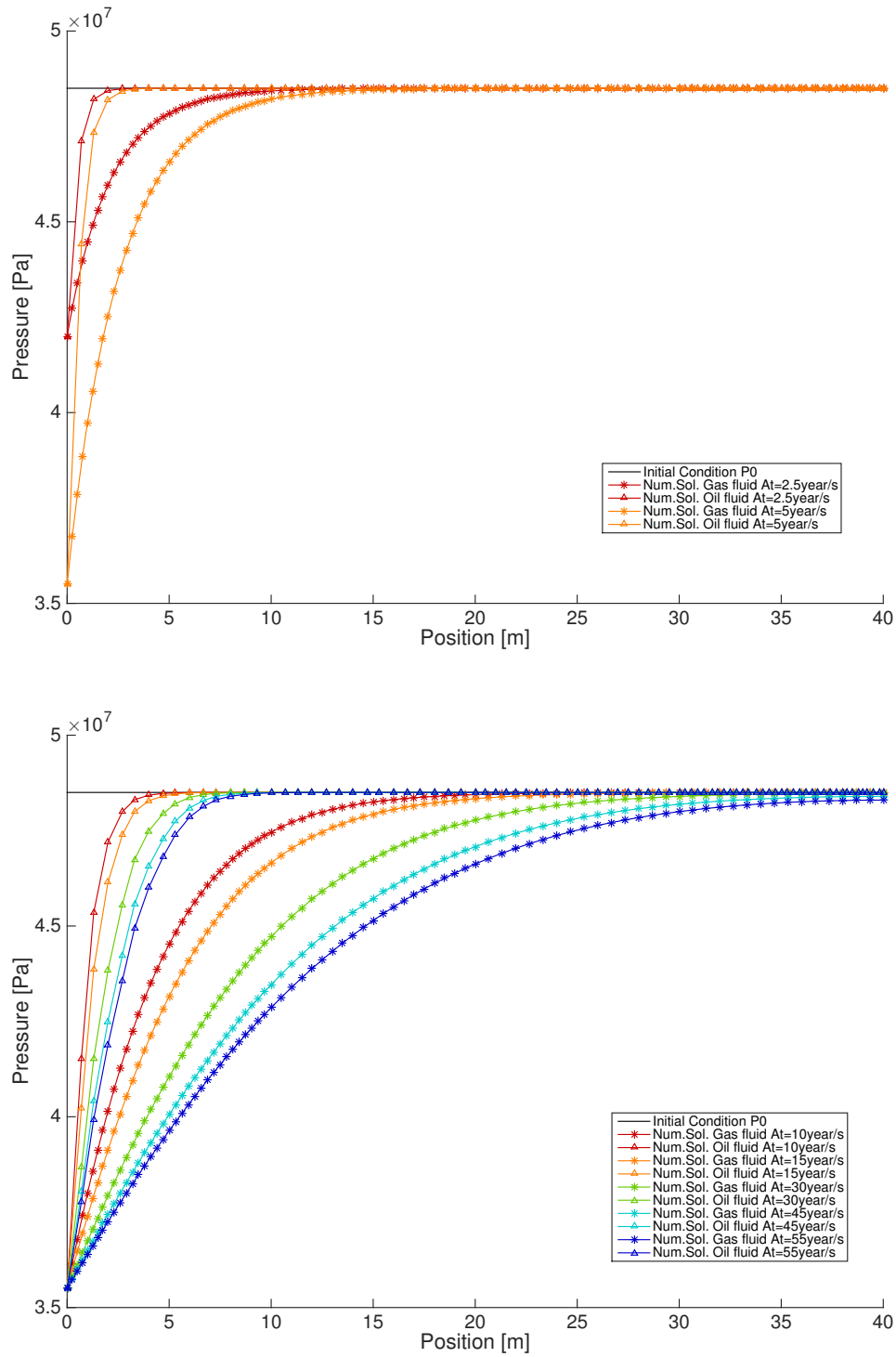


Figura 24: Evolució de la pressió dins del reservori on en línia puntejada '*' es representa la solució numèrica del codi DracMGas per al fluid compressible (gas) i en línia puntejada '^' es representa la solució numèrica per al fluid incompressible (petroli). El primer gràfic correspon al *step* de bombeig del pou i el segon gràfic representa la evolució de la pressió en el transcurs del temps fins als 55 anys.

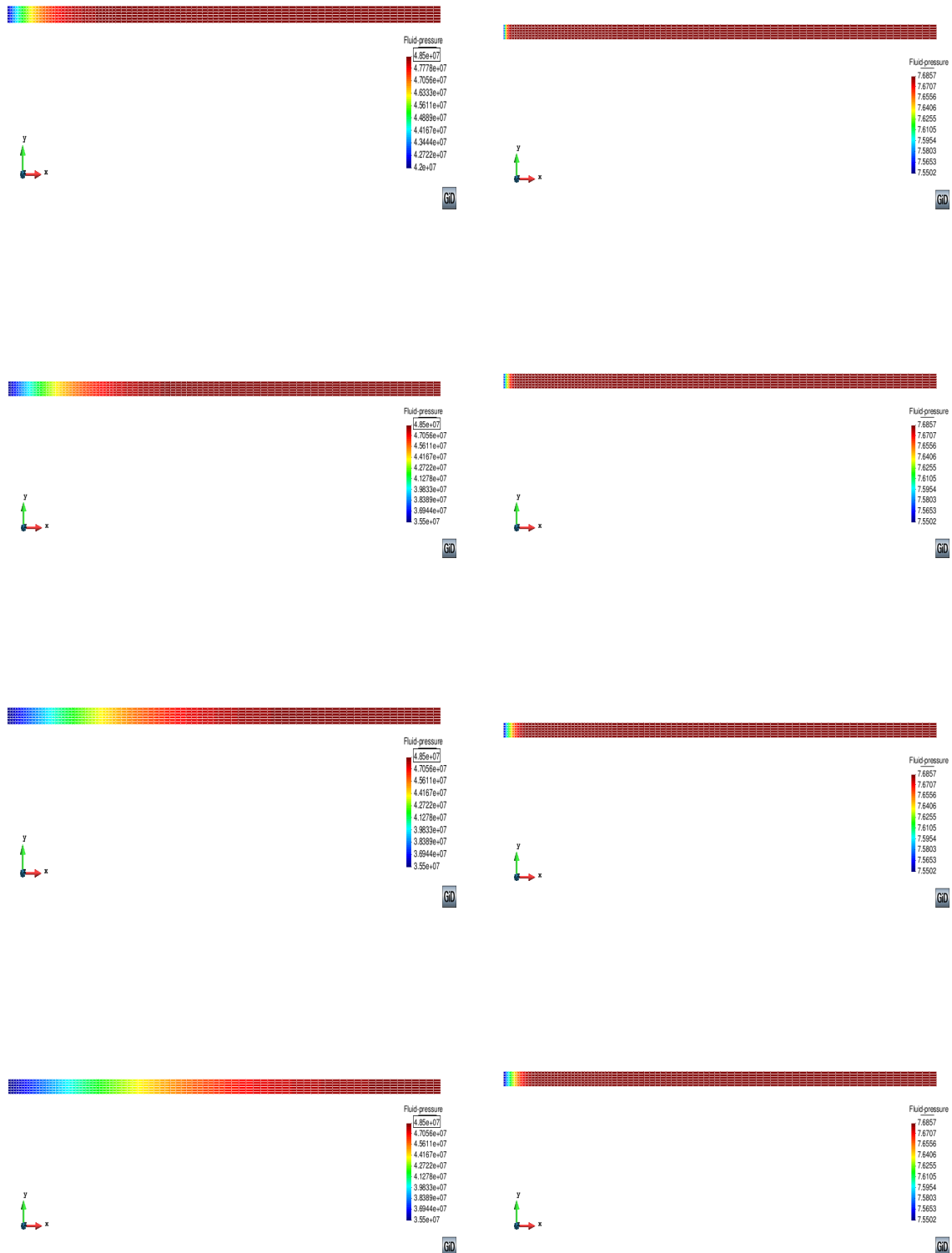


Figura 25: Distribució de pressions al llarg del reservori. Columna de l'esquerra en ordre creixent en el temps és troba el fluid compressible (gas). Columna de la dreta en ordre creixent en el temps és troba el fluid incompressible (petroli). Els intervals de temps són: 2.5 anys, 10 anys, 30 anys i 55 anys.

4.3 Exemples acadèmics en medi porós amb discontinuïtats

Com ja s’ha comentat anteriorment en la simulació hidràulica d’un sistema la presència de discontinuïtats en el medi continu afecta en gran mesura a les modelacions posteriors. Per tant, les discontinuïtats tenen una important rellevància per a realitzar estimacions i càlculs més òptims. En general, les discontinuïtats actuen com a camins preferencials per al flux de fluid, i és per això que per a l’explotació de reservoris són molt rellevants poder tenir-les ben identificades en el domini a modelitzar. En aquesta secció presentem dos exemples amb discontinuïtats. El primer es basa en un dipòsit horitzontal que conté una discontinuïtat horitzontal en la part central del dipòsit i, el segon exemple que es presenta mostra el buidatge d’un reservori si aquest conté una discontinuïtat, exemple que s’ha readaptat lleugerament del l’exemple de simulació d’un reservori fracturat proposat per Guiducci et al. (2002) i que també ha estat analitzat per Segura and Carol (2007).

4.3.1 Exemple 7, anàlisi d’un dipòsit horitzontal en medi porós amb discontinuïtat

En aquest exemple tractarem un dipòsit porós de 20 metres de llarg que és travessada per una discontinuïtat horitzontal pel centre del domini. Això, divideix el domini en dos subdominis de 0.5 metres d’ample. Aquest dipòsit conté exclusivament fluid compressible (gas). Les condicions de contorn que s’aplicaran són de pressió prescrita en ambdós extrems. A l’extrem esquerra s’imposarà una pressió de $2.7 \cdot 10^6 Pa$ i a l’extrem dret s’imposarà una pressió de $1.0 \cdot 10^6 Pa$ que serà igual que la pressió inicial del domini ($P_0 = 1.0 \cdot 10^6 Pa$). En la modelització d’aquest cas, s’aplicaran dos steps on en el primer carregarem les condicions de contorn durant el transcurs de dos dies ($\Delta t = 2dies$) i en el segon deixarem passar el temps fins a 150 dies. En aquest exemple, es vol analitzar en profunditat l’efecte directe d’incloure una junta en un domini continu porós. Com que les condicions de contorn d’aquest exemple són en els dos extrems condicions de frontera de Dirichlet, el flux serà paral·lel a la discontinuïtat i per tant, no hi haurà gradient entre ambdós costats de la junta donant com a resultat que la permeabilitat transversal de la discontinuïtat (K_t), explicada en la secció 3.3, no tindrà cap influència en els resultats. Així doncs, la prendrem com a $K_t = 0$. Per altre banda i tal i com s’ha definit en la secció 3.2 on es defineix el flux longitudinal d’una discontinuïtat (equació 50) es pot veure quines són les aportacions que juguen un paper important

	Permeabilitat Long. (K_l)	Terme Capacitat (S_{jj})	Permeabilitat Trans. (K_t)
Cas A	0	0	0
Cas B	$1.0 \cdot 10^{-15} m^3$	$3.54 \cdot 10^{-6} \text{ kg/Pa}\cdot m^3$	0
Cas C	$1.0 \cdot 10^{-13} m^3$	$3.54 \cdot 10^{-6} \text{ kg/Pa}\cdot m^3$	0

Taula 7: Paràmetres dels casos que s'utilitzaran per analitzar la influència de la junta en un medi porós.

Paràmetres	Valor
Permeabilitat absoluta del gas (K_∞)	$1.0 \cdot 10^{-15} m^2$
Longitud del dipòsit (L)	$20m$
Factor de compressibilitat (β)	$1.18 \cdot 10^{-5} \text{ kg/Pa}\cdot m^3$
Porositat (ϕ)	0.3
Viscositat dinàmica del fluid (μ_f)	$1.84 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$
Densitat del fluid (ρ_f)	1.0 kg/m^3

Taula 8: Paràmetres del medi continu del dipòsit de 20 metres de llarg.

en la modelació de juntes. Aquests paràmetres són la permeabilitat longitudinal (K_l) i el terme de capacitat (S_{jj}). Per a realitzar una bona comparativa analitzarem els cabals màssics d'entrada (Q_{Total}^m) en el sistema durant tot el temps de la modelació, i alhora desglossarem els cabals màssics d'entrada de la junta (Q_{Join}^m) i del medi continu (Q_{Cont}^m). En la taula 7 es detallen els valors dels paràmetres de la discontinuïtat per als tres casos que analitzarem. Les propietats del medi continu es troben descrites en la taula 8. La discretització del domini s'ha realitzar per 200 elements quadrilàters, 100 elements lineals i 404 nodes (figura 26).

En la figura 27 es pot veure com la distribució de pressions per als tres casos diferents marcat en '*' per al cas A, en '^' per al cas B i 'o' per al cas C. Com es pot veure la distribució de pressions per al cas A i B són idèntiques en cada interval de temps. No obstant, per al cas C la distribució de pressions per als mateixos instants de temps és notablement diferent. L'explicació rau en que en el cas C, a diferència del cas A i B on la permeabilitat global no ha sofert cap canvi brusc ja que la permeabilitat per ambdós casos té una magnitud de l'ordre de 10^{-15} , per al cas C la permeabilitat de la discontinuïtat ha pujat dos ordres de magnitud fins a 10^{-13} . Aquest fet, crea un camí preferencial i per això la distribució de pressions arriba abans a règim estacionari.



GiD

Figura 26: Discretització del dipòsit en 200 elements del continu, 100 elements de la junta i 404 nodes. En blau es representa la junta que divideix el domini en dos subdominis i en gris els elements del continu.

Pels casos A i B, el règim estacionari arriba després de més de 8 anys (línies negres discontinues en la figura 27). En les figures 28 i 29 és pot veure la distribució de pressions en una escala de color per als intervals de temps de 2 dies, 62 dies i règim estacionari (8.22 anys per als casos A i B i 150 dies per al cas C). Com és lògic, la distribució de pressions a temps molt grans ($t \rightarrow \infty$) o règim estacionari és idèntica per als tres casos estudiats. No obstant això, els cabals totals que hauran passat per cada cas seran diferent. Aquest és un altre aspecte a tenir en compte en aquest anàlisi, els cabals d'entrada totals (Q_{Total}^m) i com ja s'ha comentat, aquest cabal total s'ha separat en dues contribucions; el cabal que discorre per la discontinuïtat i el que passa pel medi continu porós. En la figura 30 es pot veure com a major permeabilitat, majors cabals d'entrada. Entre el cas A i B, la diferència recau sobre el fet que la discontinuïtat en el primer cas no aporta més permeabilitat al sistema i per tant, el flux que passa pel medi amb junta és el mateix que sense junta. Per un altre costat, en el cas B (segona imatge de la figura 30) és pot veure com el fet d'afegir el terme de capacitat i donar un valor de permeabilitat longitudinal (K_l) del mateix ordre que el medi continu provoca que el cabal màssic total que passa amb junta sigui major que el cabal màssic total que passa sense. És interessant remarcar que el cabal total (Q_{Total}^m) a l'interval de temps 2

dies, en el cas A és de $1.2 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$ i en el del cas B és de $2.4 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$, com el gradient de pressions és idèntic per a tots els casos si analitzem el flux màssic (equació 21) podem veure com la permeabilitat global del sistema en el cas B s'ha duplicat versus la permeabilitat del cas A, ja que, l'espessor del medi continu (H) és de 1 metre (equació 68).

$$q_m^{cont} = H \cdot j_v^{cont} = H \frac{K_{medi}}{\mu} \nabla P \text{ [m}^3/\text{s}]$$

$$q_m^{join} = j_v^{join} = \frac{K_l}{\mu} \nabla P \text{ [m}^3/\text{s}]. \quad (68)$$

Finalment, en el cas C es pot veure com el cabal total del sistema ha augmentat notablement, ja que, en el mateix interval de temps ($t = 2dies$) el cabal total arriba fins a $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s}$ i això es degut a la permeabilitat longitudinal de la junta. Amb aquests tres casos simples és pot veure com el fet de no tenir (cas A) o tenir (cas C) en compte les discontinuïtats pot canviar radicalment el problema a resoldre. Això posa de manifest la rellevància que tenen les discontinuïtats en les simulacions hidràuliques.

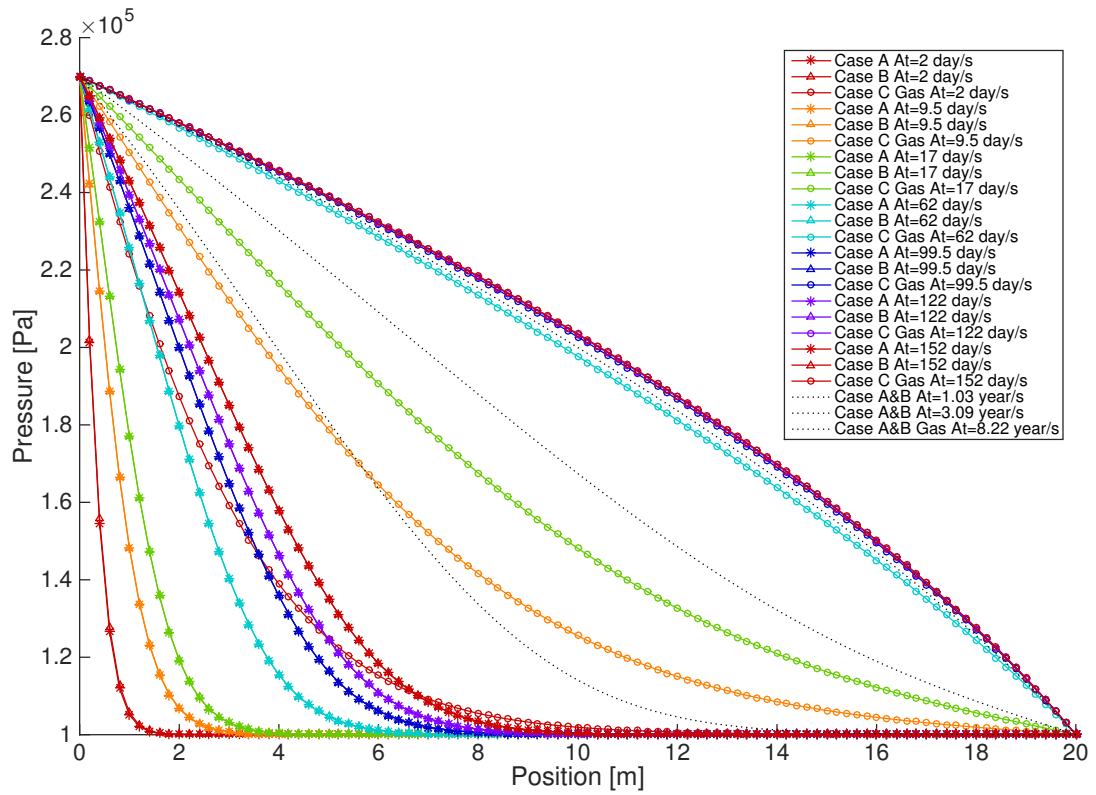


Figura 27: Evolució de la pressió de gas dins del dipòsit per a diferents temps. En línia negra discontinua s'ha realitzat el càlcul per als casos A i B fins arribar al règim estacionari.

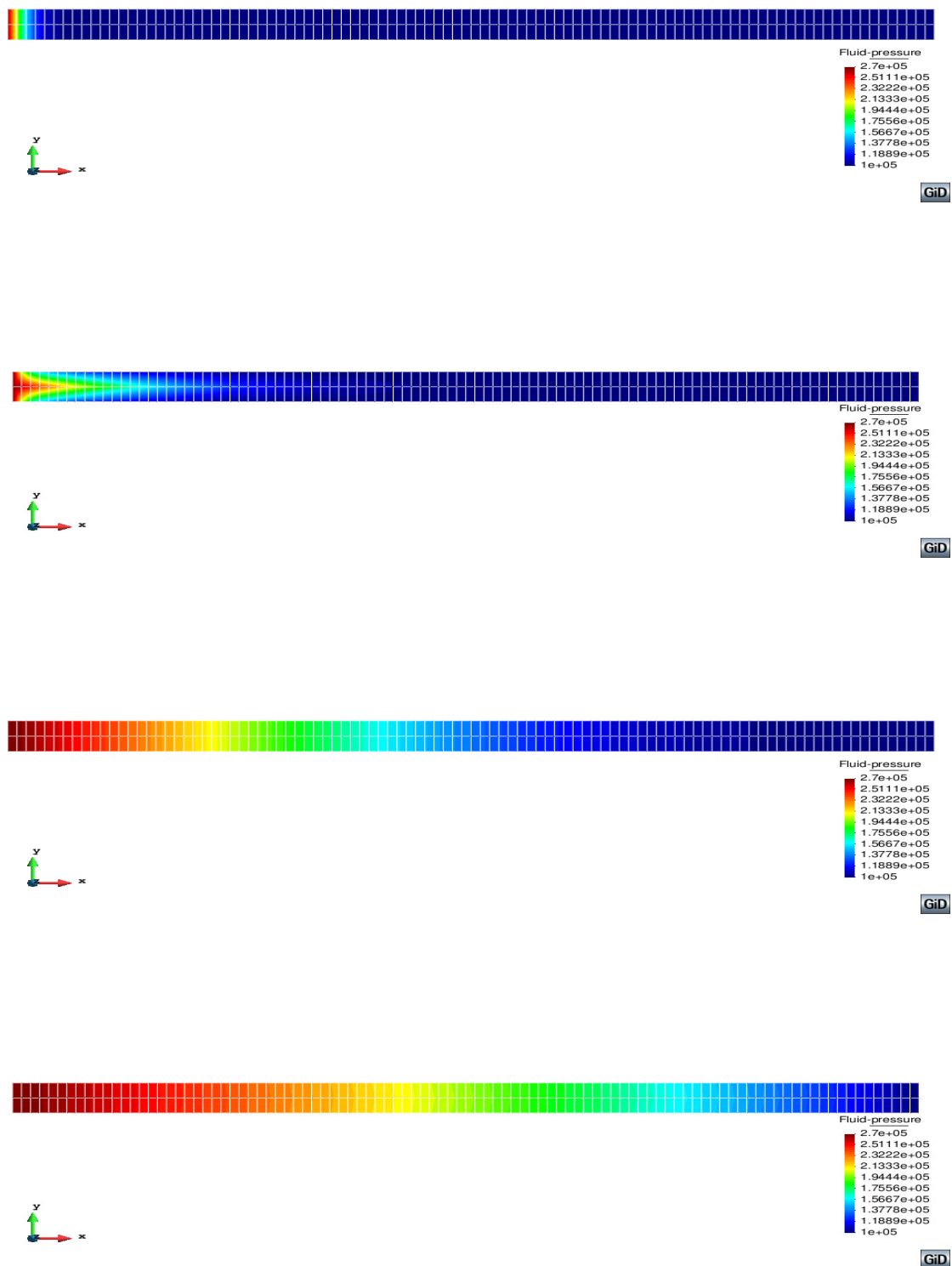


Figura 28: Distribució de pressions al llarg del dipòsit. Cada parell d'imatges corresponen al cas A&B i C respectivament per 60s temps 2 dies, 62 dies i règim estacionari (8.22 anys per als casos A&B i 150 dies per al cas C).

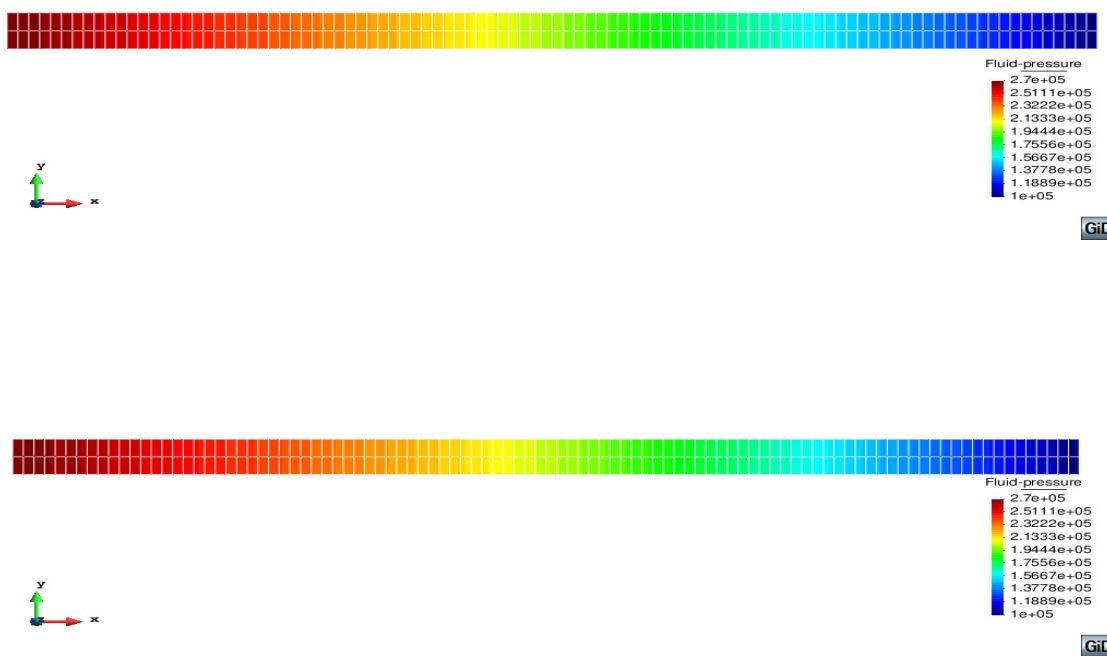


Figura 29: (Continuació de la figura 28) Es representa l'estat estacionari per al cas A&B que es mostra a la imatge superior i per al cas C que correspon a la imatge inferior.

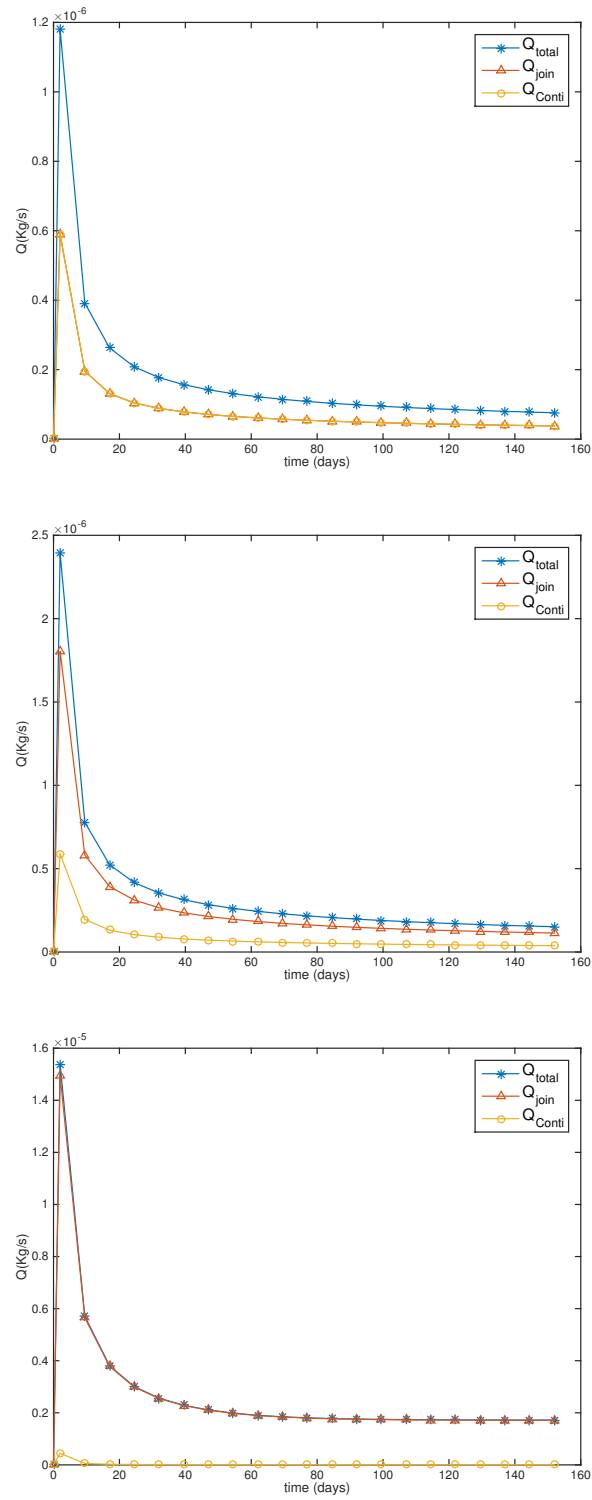


Figura 30: Evolució del cabal màssic total (puntejat '*') que entra a la discontinuïtat (puntejat '^') i al medi porós (puntejat 'o') en l'extrem esquerre del dipòsit durant els primers 150 dies per als casos A, B i C respectivament.

4.3.2 Exemple 8, anàlisi de buidatge d'un reservori en medi porós amb discontinuïtat

En aquest exemple, igual que en l'exemple 6 (secció 4.2.2), el que volem tractar és el buidatge d'un reservori però en aquest cas si el domini conté una discontinuïtat de dos ordres de magnitud més permeable que el medi porós. Aquest exemple s'ha readaptat lleugerament de l'exemple de simulació de reservori fracturat que va proposar Guiducci et al. (2002) a la seva tesis doctoral i que posteriorment va ser analitzada per Segura and Carol (2007) però, que en ambdós casos es va tractar el fluid com incompressible, més concretament aigua. El reservori és simètric i per tant, les dimensions que modelarem seran els 40 metres de llarg des del pou a l'extrem dret del reservori (figura 20). En aquest cas a diferència de l'exemple 6 en la part central del domini li travessa una discontinuïtat horitzontal. Les condicions de contorn que se suposaran són les mateixes que l'exemple 6; tot el domini impermeable ($Q = 0$) a excepció de l'extrem esquerra on es realitza el bombeig del pou que farà disminuir la pressió en aquest extrem ($\Delta p = 1.3 \cdot 10^7 Pa$) en 5 anys i la pressió inicial de tot el domini és de $P_0 = 4.85 \cdot 10^7 Pa$. Tal i com s'ha realitzar en la secció 4.2.2, la modelació constarà de dos *steps* on en el primer es realitzarà el bombament del fluid pel pou durant 5 anys i en el segon *step* és deixarà passar el temps fins arribar als 55 anys. Les propietats del medi continu es poden trobar en la taula 6 i les propietats de la junta en la taula 8. Tal i com s'ha explicat en la secció 4.3.1, la permeabilitat transversal no tindrà cap influència en els resultats i per tant la prendrem com a zero ($K_t = 0$). En la discretització del domini (figura 31) s'ha utilitzat el mateix criteri que en l'exemple 6, malla progressivament més densa en apropar-se a la zona del pou. Així doncs, la malla conté 504 elements quadrilàters, 84 elements lineals i 680 nodes (85 nodes més que en l'exemple 6 corresponen als elements junta de doble node de gruix zero).

En la figura 32 es pot veure quina és l'afectació en el perfil de pressions al llarg de la discontinuïtat on per al primer *step* (el de bombeig), per a un passos de temps petits ($t = 0.25, 2.5, 5 \text{ anys}$), es pot veure com el fluid compressible (gas) flueix molt més pel pla de la discontinuïtat que no pas pel medi continu (solució de l'exemple 6 o puntejat 'ˆ' de la figura 32). En el segon *step*, on deixem passar el temps fins a 55 anys, es pot veure que la permeabilitat longitudinal de la junta ($K_l = 1.688 \cdot 10^{-17} m^3$) fa augmentar la permeabilitat global del sistema obrint la possibilitat que en el transcurs dels 55 anys (fins i tot abans, $t = 45 \text{ anys}$) tot el reservori de gas s'hagi buidat i s'hagi arribat a la pressió del pou ($P_{well} = 35.5 MPa$). En les figures 33 i 34 es representa amb una escala

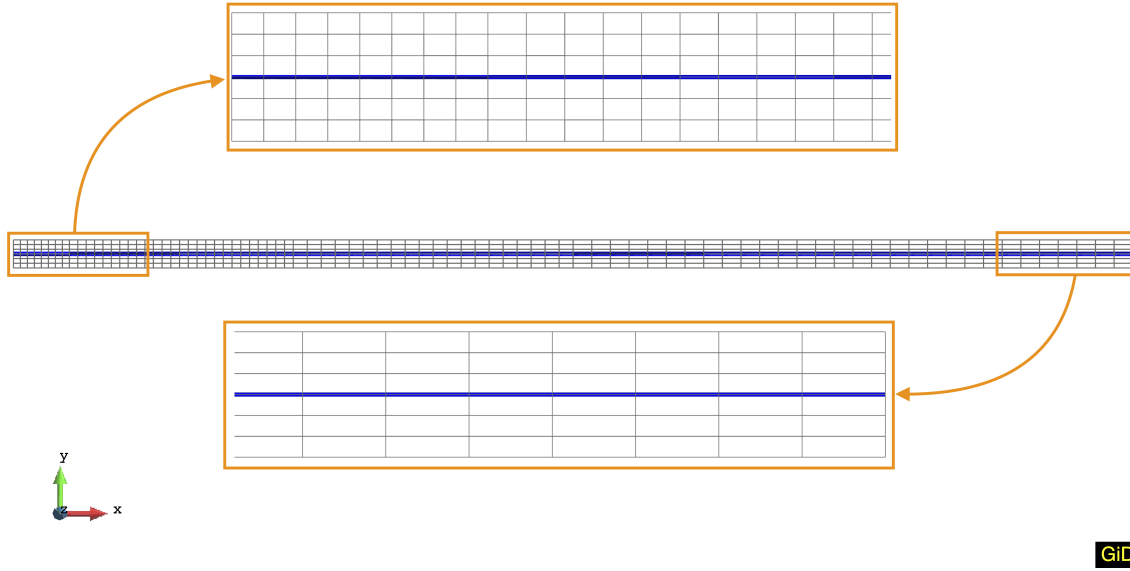


Figura 31: Discretització progressiva més densa en la zona del pou (extrem esquerra) i progressivament menys densa cap a l'extrem dret. La malla conté 504 elements quadrilàters, 84 elements lineals i 680 nodes. En blau es representa la junta que divideix el domini en dos subdominis i en verd els elements del continu.

de colors l'evolució de les pressions de gas per als intervals de temps 0.25 anys, 5 anys i 55 anys. Tal i com s'ha comentat en l'exemple anterior, els cabals màssics per a cada cas serà diferents donant clarament un major cabal màssic total en el cas on tenim la discontinuïtat. En la figura 35 es representen els cabals màssics totals (Q_{Total}^m) i també, en el cas de la discontinuïtat, està desglossat en el cabal màssics que passa per la junta (Q_{Join}^m) i pel medi continu (Q_{Cont}^m) on es pot veure que la major part de cabal màssic passa per la discontinuïtat (puntejat 'ˆ' figura 35).

Paràmetres junta	Valor
Permeabilitat longitudinal (K_l)	$1.688 \cdot 10^{-17} m^3$
Permeabilitat transversal (K_t)	$0 m^3$

Taula 9: Paràmetres de la junta del reservori de 40 metres de llarg partint de l'eix de simetria (figura 20).

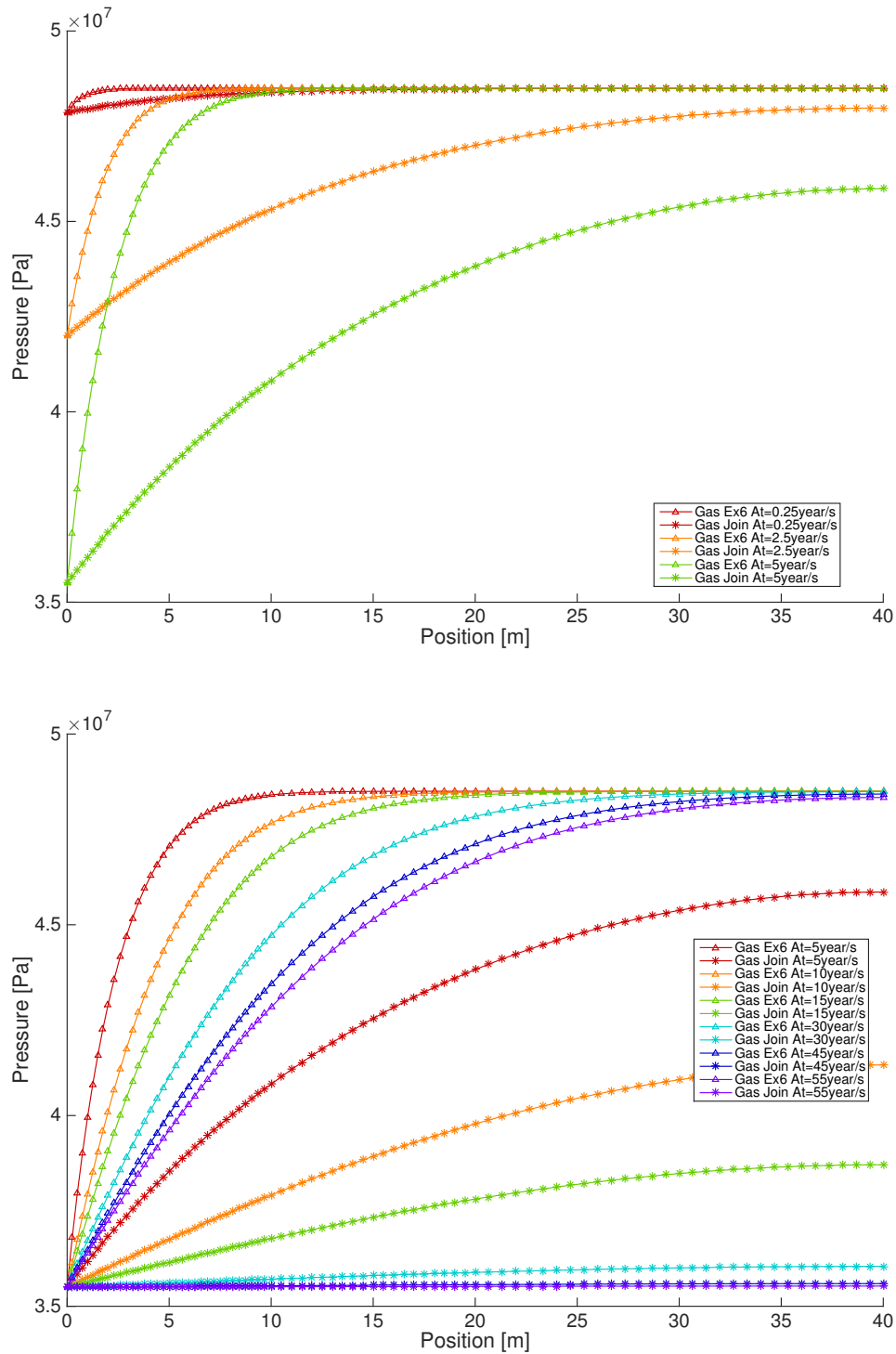


Figura 32: Evolució de la pressió de gas dins del reservori on en línia puntejada '-' es representa la solució numèrica del codi DracMGas obtinguda per a l'exemple 6 (secció 4.3.1) i en línia puntejada '*' es representa la solució numèrica del codi DracMGas obtinguda per aquest exemple on hi ha una discontinuïtat que divideix el model en dos subdominis. El primer gràfic correspon al $\frac{1}{4}$ de bombeig del pou per als intervals de 91.25 dies, 2.5 anys i 5 anys moment on es deixa de baixar la pressió. El segon gràfic representa la evolució de la pressió del gas en diferents intervals de temps fins als 55 anys.

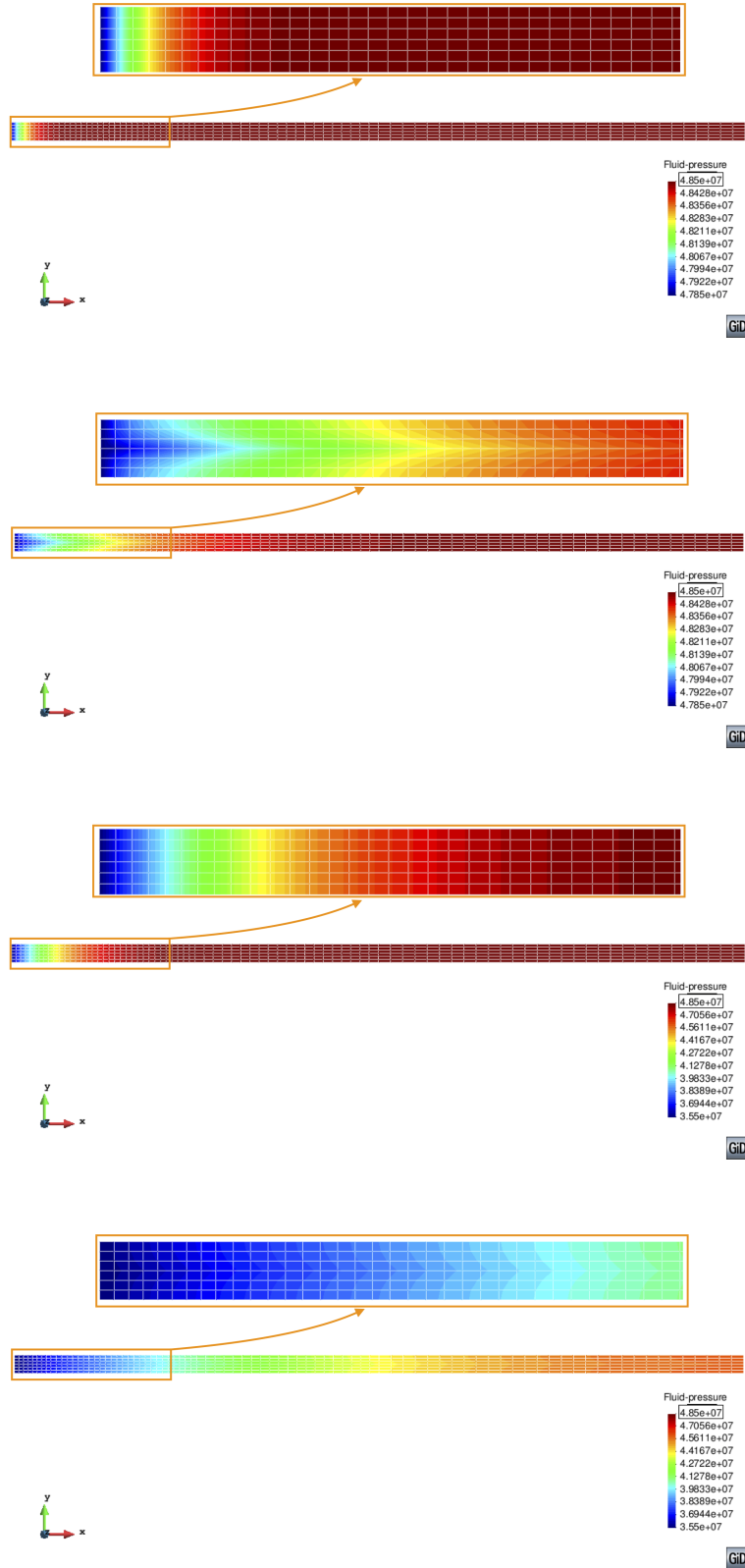


Figura 33: Distribució de pressions al llarg del reservori. Cada parell d'imatges corresponen a un interval de temps, $t = 0.25 \text{ anys}$ a $t = 5 \text{ anys}$ en ordre creixent. La primera i tercera imatge corresponen a la distribució de pressions obtingudes en l'exemple 6 (secció 4.3.1) i les imatges 2 i 4 corresponen a la modelació amb la discontinuïtat.

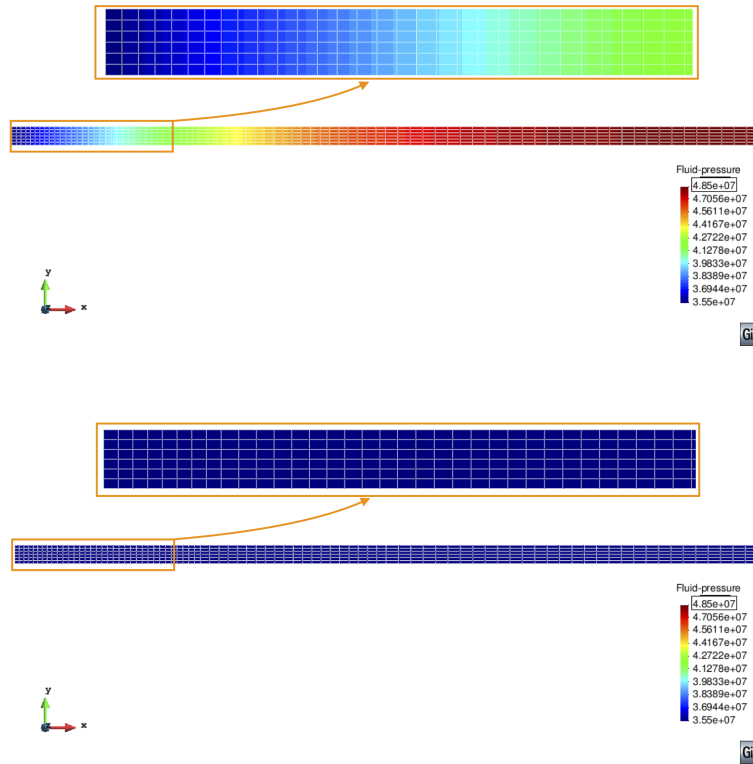


Figura 34: (Continuació de la figura 33) Es representa la distribució de pressions a temps 55 anys on la imatge superior correspon a la solució numèrica obtinguda en l'exemple 6 i la imatge inferior correspon a la solució obtinguda per el reservori amb la discontinuïtat al centre del domini.

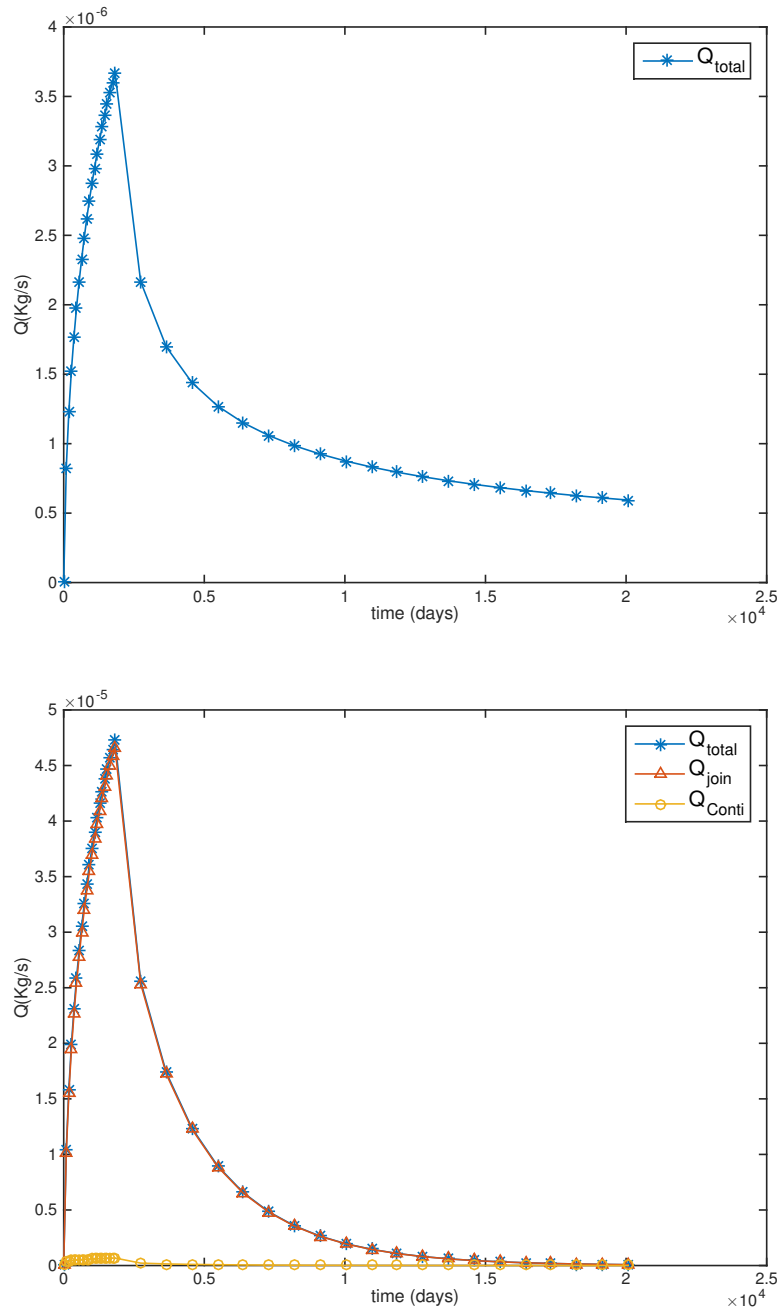


Figura 35: Evolució en l'extrem del pou del cabal màssic total (puntejat '*') que surt per la discontinuïtat (puntejat '^') i pel medi porós (puntejat 'o') durant els 55 anys de la modelació. Primer gràfic corresponen al cabal màssic de l'exemple 6 (reservori sense junta) i, segon gràfic corresponen al reservori amb discontinuïtat al centre del domini.

5 Conclusions i possibles línies d'investigació futura

Aquest treball final de màster ha servit per a donar els primers passos en la modelació del flux d'hidrocarburs en reservoris que és una de les línies d'investigació actual que està portant a terme en el grup MECMAT. Com s'ha comentat en la introducció d'aquest mateix document, aquest treball s'emmarca dins del meu pròpi projecte doctoral on el que es vol es poder arribar a modelar reservoris de petroli fracturats on hi hagin més d'una fase de fluid i es pugui realitzar anàlisi Hidro-Mecànics acoblats. Però, per arribar a aquest nivell és necessari i important poder modelar adequadament el fluid compressible com és el gas, ja que, com s'ha vist en els diversos exemples analitzats en aquest treball, el fluid compressible juga un paper rellevant tant en els termes de capacitat (terme transitori) com en el terme de permeabilitat. Les conclusions d'aquest treball s'esmentaran en una cronologia de punts.

- Arrel dels resultats obtinguts sembla possible dir que s'ha pogut representar satisfactòriament el flux de fluid compressible (gas) en medi porós fracturat basant-nos en el MEF i utilitzant els elements junta de doble node amb gruix zero (o també anomenats, *zerothickness double-nodded interface elements*).
- La principal diferència conceptual entre el flux compressible i l'incompressible prové del fet que mentre en el fluid incompressible, l'equació de continuïtat és pot establir en termes de flux de volum, en el cas compressible s'ha d'establir només en termes de flux de massa. Donada la densitat variable del fluid compressible, això porta a unes diferències notòries amb el fluid incompressible, tal com es mostra en els diversos exemples desenvolupats en aquest document on es comparen els dos fluids.
- L'addició dels nous termes del flux de fluid compressible a les equacions tenen com a conseqüència una nova contribució no lineal de la permeabilitat i un terme de capacitat (en règim transitori) que en el cas de fluid incompressible és d'ordres de magnitud inferiors i sovint negligible en els càlculs però, que per al cas de fluid compressible és un terme de magnitud comparable al terme difusiu.
- La formulació descrita en aquest document ha estat implementada en un entorn Matlab com a extensió del codi Drac que tenim disponible en grup MECMAT però, que actualment només està implementat per a fluid incompressible (aigua).

Aquest script de Matlab conté la formulació de fluid compressible per al règim estacionari i transitori i també, la formulació de les discontinuïtats mitjançant l'ús dels elements junta de doble node amb gruix zero.

- Els exemples d'aplicació mostren que la formulació i la implementació funcionen satisfactòriament per a una varietat de casos simples acadèmics que cobreixen les diverses combinacions bàsiques descrites: medi continu i juntes, règim estacionari i transitori, fluid incompressible i compressible.
- En general els exemples mostren com el fluid compressible ha de ser tractat i formulat com a tal i no com una senzilla adaptació de la formulació de fluid incompressible, ja que, les diferències són notòries entre ambdós.
- La presència de discontinuïtats és essencial per avaluar correctament els fluxos en medis fracturats. Tal i com es pot veure en l'exemple 8, les cabals d'extracció d'un reservori són completament diferents si el medi conté o no discontinuïtats. Per tant, la formulació i implementació d'aquestes discontinuïtats és un punt clau per a la futura modelació de fluxos d'hidrocarburs en reservoris de petroli.

En resum, la formulació i implementació de flux de fluid compressible han estat validades amb diversos exemples de caràcter acadèmic donant uns resultats molt satisfactoris. Aquest fet obre les portes a pròximes futures línies d'investigació com són: la verificació amb casos més complexos; la formulació i avaluació de models multifàsic on apareguin els tres fluid típics del món de l'enginyeria de reservori que són el gas, el petroli i l'aigua i, les seves interaccions per canvis de fases (gasosa o líquida); la implementació Hidro-Mecànica acoblada on es puguin realitzar anàlisi que es tingui present el medi continu; l'extensió de la formulació de fluid compressible a 3D; entre d'altres tasques o necessitats que poden anar sorgint en el transcurs d'aquestes línies esmentades.

5.1 Línia de temps de les tasques realitzades



Figure 36: La línia de temps de les diferents tasques realitzades durant aquests any (Octubre 2015-Octubre 2016).

Referències

- Alonso, E., Carol, I., Delahaye, C. H., Gens Solé, A., and Prat Catalán, P. (1996). Evaluation of Safety Factors in Discontinuous Rock. *Int. J. Rock Mech. Mini. Sci. & Geomech. Abstr.*, 33(5):513–527, 529–537.
- Andersson, J. and Dverstorp, B. (1987). Conditional simulations of fluid flow in three dimensional networks of discrete fractures. *Water Resources Research*, 23(10):1876–1886.
- Aziz, K. and Settari, A. (1979). *Petroleum reservoir simulation*. Chapman&Hall.
- Bansal, P. P., McDonald, A. E., Moreland, E. E., and Trimble, R. H. (1979). A strongly coupled, fully implicit, three dimensional, three phase reservoir simulator. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*.
- Bear, J. (2013). *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation.
- Bear, J., Tsang, C.-F., and De Marsily, G. (2012). *Flow and contaminant transport in fractured rock*. Academic Press.
- Berkowitz, B., Bear, J., and Braester, C. (1988). Continuum models for contaminant transport in fractured porous formations. *Water Resources Research*, 24(8):1225–1236.
- Beygi, M. E. and Rashidi, F. (2011). Analytical solutions to gas flow problems in low permeability porous media. *Transport in porous media*, 87(2):421–436.
- Bowen, R. M. (1982). Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *International Journal of Engineering Science*, 20(6):697–735.
- Carol, I., Gens, A., and Alonso, E. E. (1985). A three dimensional elastoplastic joint element. *Fundamentals of Rock Joints*, pages 441–451.
- Carol, I., López, C. M., and Roa, O. (2001). Micromechanical analysis of quasi brittle materials using fracture based interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1 and 2):193–215.
- Carol, I., Prat, P. C., and López, C. M. (1997). Normal and shear cracking model: application to discrete crack analysis. *Journal of engineering mechanics*, 123(8):765–773.

- Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. (1959). Conduction of heat in solids. *Oxford: Clarendon Press, 1959, 2nd ed.*
- Clegg, M. W. (1968). The Flow of Real Gases in Porous Media. In *SPE Automation Symposium*. Society of Petroleum Engineers.
- Collins, R. E. and Crawford, P. B. (1953). Calculations of Unsteady-State Gas Flow Through Porous Media, Corrected for Klinkenberg Effect. *Journal of Petroleum Technology*, 5(12):19–20.
- Dake, L. P. (1983). *Fundamentals of reservoir engineering*, volume 8. Elsevier.
- Ewing, R. E. (1983). Problems arising in the modeling of processes for hydrocarbon recovery. *The mathematics of reservoir simulation*, 1:3–34.
- Gens, A., Carol, I., and Alonso, E. E. (1989). An interface element formulation for the analysis of soil reinforcement interaction. *Computers and Geotechnics*, 7(1):133–151.
- Gens, A., Carol, I., and Alonso, E. E. (1990). A constitutive model for rock joints formulation and numerical implementation. *Computers and Geotechnics*, 9(1):3–20.
- Gibbins, J. (2006). Thermal contact resistance of polymer interfaces.
- Goodman, R. E., Taylor, R. L., and Brekke, T. L. (1968). A model for the mechanics of jointed rocks. *Journal of Soil Mechanics & Foundations Div.*
- Guiducci, C., Pellegrino, A., Radu, J.-P., Collin, F., and Charlier, R. (2002). Numerical modeling of hydro-mechanical fracture behavior. *Numerical models in Geomechanics*, pages 293–299.
- Ho, C. K. and Webb, S. W. (2006). *Gas transport in porous media*, volume 20. Springer.
- Jackson, C. P., Hoch, A. R., and Todman, S. (2000). Selfconsistency of a heterogeneous continuum porous medium representation of a fractured medium. *Water Resources Research*, 36(1):189–202.
- Jones, F. O. and Owens, W. W. (1980). A laboratory study of low-permeability gas sands. *Journal of Petroleum Technology*, 32(09):1–631.
- Kidder, R. E. (1957). Unsteady flow of gas through a semi-infinite porous medium. *J. Appl. Mech*, 27:329–332.

- Klinkenberg, L. J. (1941). The permeability of porous media to liquids and gases. In *Drilling and production practice*. American Petroleum Institute.
- Lewis, R. W. and Schrefler, B. A. (1987). *The finite element method in the deformation and consolidation of porous media*. John Wiley and Sons Inc., New York, NY.
- Lewis, R. W. and Schrefler, B. A. (1999). The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media. *Meccanica*, 34(3):231–232.
- Li, J., Zhan, H., and Huang, G. (2011). Applicability of the linearized governing equation of gas flow in porous media. *Transport in porous media*, 87(3):815–834.
- Long, J. C. S., Remer, J. S., Wilson, C. R., and Witherspoon, P. A. (1982). Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures. *Water Resources Research*, 18(3):645–658.
- Martí, A., Mirambell, E., and Carol, I. (1988). *Análisis térmico tridimensional, en régimen transitorio, por el método de los elementos finitos: aplicación a volúmenes de hormigón*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Catalunya (UPC).
- Morel-Seytoux, H. J. (1973). Two-phase flows in porous media. *Advances in Hydroscience*, 9:119–202.
- Ng, K. L. A. and Small, J. C. (1997). Behavior of joints and interfaces subjected to water pressure. *Computers and Geotechnics*, 20(1):71–93.
- Odeh, A. S. (1982). An overview of mathematical modeling of the behavior of hydrocarbon reservoirs. *SIAM Review*, 24(3):263–273.
- Otuonye, F. and Sheng, J. (1994). A numerical simulation of gas flow during coal/gas outbursts. *Geotechnical & Geological Engineering*, 12(1):15–34.
- Peaceman, D. W. (2000). *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. Elsevier.
- Poulbot, V., Krahenbuhl, L., Massé, P., and Blanpain, R. (1995). 3D interface elements for modelling complex potential drops. Comparison with a boundary elements method. *IEEE transactions on magnetics*, 31(3):1684–1689.
- Pruess, K., Wang, J. S. Y., and Tsang, Y. W. (1986). Effective continuum approximation for modeling fluid flow in fractured porous tuff. *Report SAN F86*, 7000.

- Reda, D. C. (1987). Slip flow experiments in welded tuff: The Knudson diffusion problem. *Coupled processes associated with nuclear waste repositories*, pages 485–493.
- Segura, J. M. and Carol, I. (2004). On zerothickness interface elements for diffusion problems. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 28(9):947–962.
- Segura, J. M. and Carol, I. (2007). *Coupled HM analysis using zerothickness interface elements with double nodes*. Doctoral program in civil engineering, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Segura, J. M. and Carol, I. (2008a). Coupled HM analysis using zerothickness interface elements with double nodes. Part I: Theoretical model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(18):2083–2101.
- Segura, J. M. and Carol, I. (2008b). Coupled HM analysis using zerothickness interface elements with double nodes. Part II: Verification and application. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(18):2103–2123.
- Sudicky, E. A. and McLaren, R. G. (1992). The Laplace Transform Galerkin Technique for large scale simulation of mass transport in discretely fractured porous formations. *Water Resources Research*, 28(2):499–514.
- Warren, J. E. and Root, P. J. (1963). The behavior of naturally fractured reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 3(03):245–255.
- Woodbury, A. and Zhang, K. (2001). Lanczos method for the solution of groundwater flow in discretely fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 24(6):621–630.
- Wu, Y.-S. and Pruess, K. (1998). Gas flow in porous media with Klinkenberg effects. *Transport in Porous Media*, 32(1):117–137.
- Zhu, W. C., Liu, J., Sheng, J. C., and Elsworth, D. (2007). Analysis of coupled gas flow and deformation process with desorption and Klinkenberg effects in coal seams. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 44(7):971–980.
- Zienkiewicz, O. C. (1970). *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*.